Formes différentielles, orientabilité

Exercice 1. 1. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ lisses, montrer que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

2. Soient α et β deux formes différentielles sur N, montrer que $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$.

Exercice 2. 1. Soient $f : t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = \frac{dx}{x}$, calculer $f^*\alpha$.

2. Même question avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(r, \theta) \mapsto (r \cos\theta, r \sin\theta)$ et $\alpha = dx \wedge dy$.

Exercice 3 (Orientabilité)**.** 1. Montrer qu'une variété parallélisable est orientable.

2. Montrer qu'un produit de variétés orientables est orientable.
3. Montrer que le fibré tangent d'une variété est une variété orientable.

Exercice 4 (Orientabilité des hypersurfaces)**.** 1. Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ une hypersurface. Montrer que S est orientable si et seulement si il existe une fonction lisse $N : S \to \mathbb{R}^n$ telle que $T_xS \oplus \mathbb{R}N(x) = \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in S$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une submersion lisse. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est orientable.

Exercice 5 (Sphères)**.** 1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est-elle orientable ?

2. Soient $dV = dx_0 \wedge \cdots \wedge dx_n$ la forme volume standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. la forme égale au déterminant en tout point) et $X : x \mapsto \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ le champs de vecteurs radial. Expliciter $\omega = X \lrcorner dV$ (on rappelle que $(Y \lrcorner \alpha)(Y_1, \ldots, Y_p) = \alpha(Y, Y_1, \ldots, Y_p)$).
3. Vérifier que ω est invariante sous l'action de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$.
4. Soit $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'injection canonique, montrer que $i^*(\omega)$ est une forme volume.

Exercice 6 (Tores)**.** Le tore $\mathbb{T}^n$ est-il orientable ? Si oui, construire une forme volume.

Exercice 7 (Espaces projectifs)**.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ l'antipodie, c'est-à-dire $x \mapsto -x$. Cette application préserve-t-elle l'orientation ?

2. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est-il orientable ?

Exercice 8 (Gradient, divergence, rotationnel)**.** On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et on note $dV = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sa forme volume standard.

1. Soit $\alpha \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs X_α tel que $\alpha = \langle X_\alpha, \cdot \rangle$. Si $\alpha = df$ pour une certaine fonction lisse f, X_α est appelé gradient de f, noté ∇f.
2. Soit X un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$, montrer qu'il existe une unique fonction $\mathrm{div}(X)$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathcal{L}_X(dV) = \mathrm{div}(X) dV$. En donner une expression.
3. On suppose désormais que $n = 3$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\mathrm{rot}(X)$ tel que $\mathrm{rot}(X) \lrcorner (dx \wedge dy \wedge dz) = \langle X, \cdot \rangle$. En donner une expression.
4. Soit f une fonction lisse, calculer $\mathrm{rot}(\nabla f)$ et $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, X)$.