Différentielle extérieure et toute cette sorte de choses

Exercice 1 (Échauffement)**.** Calculer $d\omega$, où ω est la forme sur $\mathbb{R}^n$ suivante

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Exercice 2 (Forme d'angle)**.** Soient α la 1-forme différentielle $(x, y) \mapsto \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $f : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $d\alpha$.
2. Calculer $f^*(\alpha)$. Cette forme est-elle fermée ? Exacte ?
3. α est-elle exacte ?
   Indication : considérer $i^*\alpha$ où $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est l'injection canonique et montrer que si $i^*\alpha$ était exacte, elle s'annulerait en un point de $\mathbb{S}^1$.

Exercice 3 (Formule de Stokes)**.**

1. Soient M une variété orientée fermée et $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, calculer $\int_M d\alpha$.
2. Une forme volume sur M peut-elle être exacte ?
3. Qu'en est-il sur une variété orientée, sans bord, mais non compacte ?

Exercice 4 (Lee, p. 491)**.** Soient $X : (x, y, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y : (x, y, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'en tout point $p \in \mathbb{R}^3$, $(X(p), Y(p))$ est libre.
2. Calculer $[X, Y]$. La distribution engendrée par X et Y est-elle intégrable ?
3. Retrouver ce résultat sans utiliser le théorème de Frobenius.

Exercice 5 (Construction de cartes, Lee p. 236)**.**
Soient $X : (x, y) \mapsto y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ et $Y : (x, y) \mapsto x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $[X, Y]$. Existe-t-il des coordonnées (s, t) sur un voisinage de $(1, 0)$ telles que $X = \frac{\partial}{\partial s}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$?
2. Calculer les flots de X et Y.
3. En déduire une carte explicite sur un voisinage de $(1, 0)$ qui vérifie la propriété précédente.

Exercice 6 (Formule de Cartan, Lafontaine thm. 31 et 36, chap. 5)**.**

1. Soient $f : M \to N$ lisse et α une forme sur N. Vérifier que $f^*(d\alpha) = d(f^*\alpha)$.
2. Soit X un champ de vecteurs sur M, montrer que $\mathcal{L}_X \circ d = d \circ \mathcal{L}_X$.
3. Soient α et β deux formes sur M, montrer que $\mathcal{L}_X(\alpha \wedge \beta) = \mathcal{L}_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \mathcal{L}_X\beta$.
4. Montrer que $\mathcal{L}_{[X,Y]} = \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ pour tous champs de vecteurs X et Y.
5. Prouver la formule de Cartan : pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et toute forme ω sur M

$$\mathcal{L}_X(\omega) = X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega).$$

Exercice 7 (Lemme de Poincaré, Lafontaine thm. 40, chap. 5)**.**

1. Soient X et α respectivement un champ de vecteurs et une forme différentielle fermée sur $\mathbb{R}^n$. On note ϕ^X le flot de X que l'on suppose défini sur $I \times \mathbb{R}^n$ avec I un intervalle. Soient s_1 et $s_2 \in I$, montrer que

$$(\phi_{s_2}^{X*})(\alpha) - (\phi_{s_1}^{X*})(\alpha) = d\left(\int_{s_1}^{s_2} X \lrcorner (\phi_t^{X*})(\alpha)\,\mathrm{d}t\right).$$

   Indication : utiliser la formule de Cartan.
2. En déduire que toute forme fermée sur $\mathbb{R}^n$ est exacte.
3. Étendre ce résultat aux formes fermées définies sur un ouvert difféomorphe à $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 (Théorème de la boule chevelue)**.**

Soit X un champ de vecteurs unitaires sur la sphère $\mathbb{S}^n$, on définit $f : [0,1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ par

$$(t, x) \mapsto \cos(t\pi)x + \sin(t\pi)X(x).$$

On note également ω la forme volume de la sphère définie par :

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) = \det(x, v_1, \dots, v_n).$$

1. Montrer que f est bien définie et lisse sur $[0,1] \times \mathbb{S}^n$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^n} f_1^*\omega - \int_{\mathbb{S}^n} f_0^*\omega = \int_{\partial([0,1]\times\mathbb{S}^n)} f^*\omega = 0$, où $f_t = f(t, \cdot)$.
3. En déduire le théorème de la boule chevelue : tout champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^n$ s'annule si n est pair.
4. Qu'en est-il pour n impair ?