

Exercice 1. Observer que la fonction $x : t \in \mathbb{R} \mapsto t^4$ vérifie pour tout $|x'(t)| \leq \sqrt{x(t)}$ au voisinage de 0 et $x(0) = 0$. Soit y une solution de $y'(t) = \sqrt{y(t)}$ définie sur un intervalle I contenant 0. A-t-on $|x(t)| \leq |y(t)|$ pour tout $t \in I$?

Exercice 2. Soient $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues à valeurs positives ou nulles vérifiant pour tout $t \geq 0$

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t fh.$$

Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$f(t) \leq g(t) + \int_0^t g(s)h(s) \exp\left(\int_t^s h\right) ds.$$

Exercice 3. Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ une fonction localement lipschitzienne.

1. Montrer que

$$\int_0^\infty \frac{1}{g} = \infty \tag{1}$$

si et seulement l'équation différentielle $r'(t) = r(y(t))$ a une solution maximale définie sur $]0, +\infty[$.

2. Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application localement lipschitzienne en la première variable. On suppose que $g : r \mapsto \sup_{t \in \mathbb{R}, |x|=r} |F|$ vérifie (1). Montrer que les solutions maximales de l'équation différentielle $x' = F(x, t)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négatives et soit $T > 0$ un réel. On note $P = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \text{ } T\text{-périodique}\}$.

1. Soit $f \in P$ non constante de plus petite période T . Montrer que l'équation différentielle $g'(t) = Ag(t) + f(t)$ possède une unique solution dans P . On note g_f cette solution.
2. Montrer que g_f est l'unique solution périodique de l'équation précédente.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in P$, $\sup |g_f| \leq \sup |f|$.

Exercice 5. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $M \geq 0$ si pour tout (i, j) , $m_{i,j} \geq 0$. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$, on note $Y \geq 0$ si $y_i \geq 0$ pour tout i , et on note $Y > 0$ si $y_i > 0$ pour tout i .

Soit $A : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue vérifiant $A(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.

1. Soit $Y : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de $Y' = A(t)Y$ vérifiant $Y(0) > 0$. Montrer que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $Y(t) > 0$.
2. Montrer qu'il existe une solution Y de $Y' = -A(t)Y$, non nulle, telle que $Y(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.