

Exercice 1. Dessiner l'image du rectangle $\{1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$ par les flots des systèmes $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$, $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$, $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$, $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = y \end{cases}$.

Exercice 2.

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 , soit (E) l'ED $x'(t) = f(x(t))$ et soit ϕ le flot associé. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $\phi(t, x)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Definition. Soit $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble limite de x noté $\omega(x)$ est défini par :

$$\omega(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\phi(s, x); s \geq t\}}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que :

1. $\omega(x) = \omega(\phi(t, x))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
2. $\omega(x)$ est invariant sous le flot : pour tout $y \in \omega(x)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\phi(t, y) \in \omega(x)$,
3. Donner des exemples où $\omega(x)$ est vide, un point, une courbe.
Supposons maintenant qu'il existe un compact $D \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\phi(t, x) \in D$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
4. $\omega(x)$ est un fermé non-vide.
5. $\omega(x)$ est connexe.

Exercice 3. On considère les domaines $D_1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ et $D_2 = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer, sans le calculer explicitement, que si φ_t est le flot au temps t de

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} x$$

alors $\varphi_1(D_1) \neq D_2$.

Exercice 4.

On pose $\phi_t(x, y) = (xe^{(1-e^{-t})y}, e^{-t}y)$, $\psi_t(x, y) = (e^t x + ty, e^t y + tx)$. Déterminer si ϕ_t et ψ_t sont le temps t d'un flot. Si oui, déterminer l'ED associée.

Exercice 5. Soit f un champ de vecteurs de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que les trajectoires de l'équation $x' = f(x)$ et celles de l'équation $x' = \alpha(x)f(x)$ ont le même "dessin" sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6. On note avec $\text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ le groupe de difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ une application C^∞ . Quand est-ce qu'il existe une équation différentielle qui a comme flot ϕ ?

Exercice 7.

Deux flots φ_t et ψ_t sont dits *linéairement équivalents* (resp. *différentiellement équivalents*) s'il existe $g \in GL_n(\mathbb{R})$ (resp. g difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$) tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g \circ \varphi_t = \psi_t \circ g. \quad (1)$$

1. Soit $g \in GL_n(\mathbb{R})$ qui transforme les orbites du flot φ_t en celles de ψ_t . La condition (1) est-elle satisfaite ?
2. Montrer que les flots de deux systèmes linéaires sont linéairement équivalents si et seulement si ils sont différentiellement équivalents.