Espace tangent, différentielle

Exercice 1 (Matrices de rang fixé)**.** Soit V_r l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$ de rang exactement r. On veut montrer que V_r est une sous-variété de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{rg}(M) \geqslant r\}$ est un ouvert.
2. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ par blocs où $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que $M \in V_r$ si et seulement si $D = CA^{-1}B$.
3. En déduire que V_r est une variété de dimension $(m+n-r)r$.

Exercice 2 (Exercice de calligraphie)**.** Soient M, N et P des variétés lisses, $F : M \to N$ et $G : N \to P$.

1. Montrer que $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$ et $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.
2. Montrer que $d_p\left(\mathrm{Id}_M\right) = \mathrm{Id}_{T_pM}$.
3. Montrer que $d_p(G \circ F) = \left(d_{F(p)}G\right) \circ d_pF$.
4. Si F est un difféomorphisme, montrer que d_pF est inversible et $d_{F(p)}F^{-1} = (d_pF)^{-1}$.

Exercice 3 (Localité des dérivations)**.** Soient M une variété lisse, $p \in M$ et D une dérivation en p.

1. Montrer que si f est constante alors $D(f) = 0$.
2. Soient f et $g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et U un voisinage de p tel que $f \equiv g$ sur U. Montrer que $D(f) = D(g)$. On dit que $D(f)$ ne dépend que du germe de f en p.

Exercice 4 (Espace tangent et chemins)**.** Soient M une variété lisse et $p \in M$.

1. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to M$ lisse tel que $\gamma(0) = p$, montrer que $D(\gamma) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$, définie par $f \mapsto (f \circ \gamma)'(0)$, est une dérivation.
2. Soient $F : M \to N$ et $\gamma : \mathbb{R} \to M$ lisses, montrer que $d_pF \cdot D(\gamma) = D(F \circ \gamma)$.
3. Soit $v : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ une dérivation en p, montrer qu'il existe $\gamma : \mathbb{R} \to M$ lisse tel que $\gamma(0) = p$ et $v = D(\gamma)$.
4. Soient γ_1 et γ_2 lisses de $\mathbb{R}$ dans M tels que $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.
   (a) $D(\gamma_1) = D(\gamma_2)$.
   (b) Il existe une carte (U, φ) autour de p telle que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.
   (c) Pour toute carte (U, φ) autour de p, on a $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.
5. Conclure que T_pM est l'ensemble des courbes lisses $\gamma : \mathbb{R} \to M$ telles que $\gamma(0) = p$, modulo tangence en 0 dans une carte (dans toute carte).