Sous-variétés, plongements

Exercice 1 (Espace tangent d'un produit)**.** Soient M et N deux variétés lisses, construire un isomorphisme naturel entre $T_{(p,q)}(M \times N)$ et $T_pM \times T_qN$.

Exercice 2 (Exemples de groupes de Lie)**.** Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont des variétés et décrire leurs tangents en I_n.

Exercice 3 (Points fixes d'involutions)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application lisse telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$. On pose $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = x\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{Fix}(f)$, $(d_x f)^2 = \mathrm{Id}$.
2. On suppose que $f(0) = 0$. On définit $h = \frac{1}{2}(\mathrm{Id} + d_0 f \circ f)$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0. Montrer que $h \circ f = d_0 f \circ h$.
3. En déduire que $\mathrm{Fix}(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.
4. *(Bonus)* Que dire de $\mathrm{Fix}(f)$ lorsque $f \circ \cdots \circ f = \mathrm{Id}$ (itérée k-ième) ?

Exercice 4 (Plongement de Veronese)**.** On rappelle que l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est le quotient de $\left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right)$ par la relation de colinéarité. Si $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on dit $(x_0 : \ldots : x_n)$ sont les *coordonnées homogènes* de la droite engendrée par x.

Soit $h : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^5$ définie par $h(x : y : z) = (x^2 : y^2 : z^2 : xy : yz : zx)$.

1. Vérifier que h est bien définie.
2. Montrer que h est un plongement.