
Théorème de Sard, transversalité

Exercice 1. Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n de dimension m avec $2m < n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| < \varepsilon$ et $(M + v) \cap M = \emptyset$.

(*Bonus*) Que se passe-t-il pour $n \leq 2m$?

Exercice 2 (Transversalité). Soient \mathcal{C} le cylindre de \mathbb{R}^3 d'équation

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - 1)^2 + y^2 = 1\}$$

et S_r la sphère de centre 0 et de rayon $r > 0$. Pour quelles valeurs de r l'intersection $\mathcal{C} \cap S_r = M_r$ est-elle une sous-variété de \mathbb{R}^3 ? Que se passe-t-il dans les cas critiques ?

Exercice 3 (Image d'une immersion injective). 1. Soit $h : M \rightarrow N$ une immersion injective propre (i.e. l'image réciproque d'un compact de N est compacte). Montrer que h est un plongement.

2. Soit $h : t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, t \frac{t^2-1}{t^2+1} \right)$ de $] -\infty; 1[$ dans \mathbb{R}^2 . On note $M = h(] -\infty; 1[)$. L'application h est-elle une immersion injective ? Est-elle propre ? Est-ce un plongement ? Est-ce que M est une sous-variété de \mathbb{R}^2 ?
3. Soit $i :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$ l'inclusion canonique. Montrer que i est une immersion injective. Est-elle propre ? Est-ce un plongement ?
4. Soit $h : M \rightarrow N$ une immersion injective telle que $h(M)$ soit une sous-variété de N . Est-ce un plongement ?

Exercice 4 (Variété d'incidence). Soient M une variété lisse et V un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui contient les constantes.

1. Montrer que $\Sigma = \{(f, x) \in V \times M \mid f(x) = 0\}$ est une hypersurface de $V \times M$ et décrire l'espace $T_{(f,x)}\Sigma$.
2. Dans cette question on suppose que $M = \mathbb{R}$.
 - (a) Soit $(f, x) \in \Sigma$ tel que $f'(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe U et V , des voisinages ouverts de f et x respectivement, et $\varphi : U \rightarrow V$ lisse telle que $\varphi(f) = x$ et $g(\varphi(g)) = 0$ pour tout $g \in U$.
 - (b) En déduire que, dans $\mathbb{R}_d[X]$, les racines simples d'un polynôme sont des fonctions lisses des coefficients.
 - (c) (*Bonus*) Que se passe-t-il au niveau des racines multiples ?
3. Soient p_V et p_M les projections de Σ sur V et M .
 - (a) Montrer que p_M est une submersion.
 - (b) Déterminer les points critiques de p_V , puis ses valeurs critiques.
 - (c) Montrer que l'ensemble des $f \in V$ tels que $f^{-1}(0)$ est une hypersurface de M est de mesure pleine.