Algèbre multilinéaire, fibrés vectoriels

Exercice 1 (Algèbre extérieure)**.**

1. Existe-t-il une forme multilinéaire alternée α sur un espace vectoriel E tel que $\alpha \wedge \alpha \neq 0$?
2. Existe-t-il une forme alternée non nulle qui commute à toutes les autres ?

Exercice 2 (Formes décomposables)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Une forme k-linéaire alternée sur E est dite *décomposable* si elle s'écrit comme produit extérieur de k formes linéaires. Sinon on dit qu'elle est *indécomposable*.

1. Montrer que les formes linéaires et n-linéaires alternées sont toujours décomposables.
2. Soit $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$, montrer qu'une forme k-linéaire alternée $\omega \neq 0$ est divisible par α (i.e. s'écrit comme $\alpha \wedge \beta$) si et seulement si $\alpha \wedge \omega = 0$.
3. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ une famille libre de E^*. La 2-forme $\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$ est-elle décomposable ?
4. Une $(n-1)$-forme ω est-elle toujours décomposable (on suppose $n > 1$) ? On pourra considérer l'application $\phi_\omega : \alpha \mapsto \alpha \wedge \omega$ de E^* dans $\bigwedge^n E^*$.

Exercice 3 (Fibré tangent de la sphère)**.** Écrire les fonctions de transitions pour le fibré tangent de $\mathbb{S}^n$ et les trivialisations données par les projections stéréographiques de pôle nord et sud.