Fibrés vectoriels

Exercice 1 (Trivialisations locales et référentiels)**.** Soit $E \to M$ un fibré vectoriel de rang r. Soit U un ouvert de M, montrer qu'une trivialisation locale de U définit r sections locales $s_1, \ldots, s_r$ de E au-dessus de U telles que, pour tout $x \in U$, $(s_1(x), \ldots, s_r(x))$ est une base de la fibre E_x au-dessus de x.

Inversement, soient $s_1, \ldots, s_r$ des sections locales de $E \to M$ au-dessus de U telles que pour tout $x \in U$, $(s_1(x), \ldots, s_r(x))$ est une base de E_x. Montrer que ces sections définissent une trivialisation locale de E au-dessus de U.

Exercice 2 (Sections globales)**.**

1. Décrire les sections du fibré trivial $M \times \mathbb{R}^r \to M$.
2. Un fibré vectoriel $E \to M$ a-t-il toujours des sections non nulles ?
3. Soit $L \to M$ un fibré en droites. Donner un critère de trivialité portant sur ses sections globales ?
4. Le fibré tangent de $\mathbb{S}^1$ est-il trivial ?
5. Trouver un critère de trivialité du même type pour un fibré $E \to M$ de rang $r > 1$.
6. Le fibré tangent du tore $\mathbb{T}^n$ est-il trivial ?

Exercice 3 (Sous-fibrés)**.** Soient $\pi : E \to M$ un fibré vectoriel de rang r, on dit que $V \subset E$ est un sous-fibré de E de rang k si, au voisinage de tout point, il existe une trivialisation de E telle que :

$$\pi^{-1}(U) \cap V \simeq U \times \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) \subset U \times \mathbb{R}^r.$$

1. Vérifier qu'un sous-fibré vectoriel est un fibré vectoriel.
2. Soit $M \subset N$ une sous-variété. Montrer que $TM \to M$ est un sous-fibré de $i^*(TN)$, où $i : M \to N$ est l'injection canonique.

Exercice 4 (Fibré tautologique)**.** On note $J = \{(D, v) \in \mathbb{RP}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in D\}$.

1. Montrer que $J \to \mathbb{RP}^n$ est un fibré en droites. Est-il trivial ?
2. On note $L \to \mathbb{RP}^n$ le fibré dual de J. Soit P un polynôme homogène de degré d en $n+1$ variables. Montrer que P définit naturellement une section globale de $L^{\otimes d}$.

Exercice 5 (Fibré normal)**.** On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. On appelle fibré normal de M l'ensemble

$$NM = \left\{ (x, v) \in M \times \mathbb{R}^n \mid v \in T_x M^\perp \right\}.$$

1. Vérifier que NM est un fibré vectoriel sur M et donner son rang.
2. Montrer que le fibré trivial $M \times \mathbb{R}^n \to M$ est isomorphe à $TM \oplus NM$.
3. Le fibré normal de $\mathbb{S}^{n-1}$ est-il trivial ?
4. Le fibré normal d'une hypersurface est-il trivial ?