Formes différentielles, différentielle extérieure, Stokes et Frobenius

Exercice 1. 1. Soient $f : t \mapsto e^t$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\alpha = \frac{dx}{x}$, calculer $f^*\alpha$.

2. Même question avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\alpha = dx \wedge dy$.

Exercice 2 (Orientabilité)**.** 1. Montrer qu'une variété parallélisable est orientable.

2. Montrer qu'un produit de variétés orientables est orientable.
3. Montrer que le fibré tangent d'une variété est une variété orientable.

Exercice 3 (Sphères)**.** 1. La sphère $\mathbb{S}^n$ est-elle orientable ?

2. Soient $dV = dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^n$ la forme volume standard de $\mathbb{R}^{n+1}$ (i.e. la forme égale au déterminant en tout point) et $X : x \mapsto \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ le champs de vecteurs radial. Expliciter $\omega = X \lrcorner dV$ (on rappelle que $(Y \lrcorner \alpha)(Y_1, \ldots, Y_p) = \alpha(Y, Y_1, \ldots, Y_p)$).
3. Vérifier que ω est invariante sous l'action de $SO_{n+1}(\mathbb{R})$.
4. Soit $i : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ l'injection canonique, montrer que $i^*(\omega)$ est une forme volume.

Exercice 4 (Tores)**.** Le tore $\mathbb{T}^n$ est-il orientable ? Si oui, construire une forme volume.

Exercice 5 (Espaces projectifs)**.** 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, $x \mapsto -x$. Cette application préserve-t-elle l'orientation ?

2. L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ est-il orientable ?

Exercice 6 (Échauffement)**.** Calculer $d\omega$, où ω est la forme suivante sur $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x_i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

Exercice 7 (Forme d'angle)**.** Soient α la 1-forme différentielle $(x, y) \mapsto \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $f : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $d\alpha$.
2. La forme $f^*(\alpha)$ est-elle fermée ? Est-elle exacte ?
3. α est-elle exacte ?
   Indication : considérer $i^*\alpha$ où $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ est l'injection canonique et montrer que si $i^*\alpha$ était exacte, elle s'annulerait en un point de $\mathbb{S}^1$.

Exercice 8 (Formule de Stokes)**.** 1. Soient M une variété orientée compacte sans bord et $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$, calculer $\displaystyle\int_M d\alpha$.

2. Une forme volume sur M peut-elle être exacte ?
3. Qu'en est-il sur une variété orientée, sans bord, mais non compacte ?

Exercice 9. Soient $X : (x, y, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}$ et $Y : (x, y, z) \mapsto \frac{\partial}{\partial y}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer qu'en tout point $p \in \mathbb{R}^3$, $(X(p), Y(p))$ est libre.
2. Calculer $[X, Y]$. La distribution engendrée par X et Y est-elle intégrable ?
3. Retrouver ce résultat sans utiliser le théorème de Frobenius.

Exercice 10 (Construction de cartes)**.** Soient $X : (x, y) \mapsto x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}$ et $Y : (x, y) \mapsto x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}$ deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$.

1. Calculer $[X, Y]$. Existe-t-il des coordonnées (s, t) sur un voisinage de $(1, 0)$ telles que $X = \frac{\partial}{\partial s}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$?
2. Calculer les flots de X et Y.
3. En déduire une carte explicite sur un voisinage de $(1, 0)$ telle que les coordonnées (s, t) associées vérifient $X = \frac{\partial}{\partial s}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial t}$.