

Formule de Künneth-Orientabilité

Exercice 1.

Calculer les anneaux (la multiplication est le cup-produit) de cohomologie des espaces topologiques suivants à coefficients dans R .

1. $S^n \times S^m$.
2. Le tore de dimension n .
3. $\Sigma_g \times \Sigma_h$

Exercice 2.

Montrer que si M est une variété différentielle, les deux notions d'orientabilité définies en cours coïncident.

Exercice 3.

Montrer que la surface Σ'_g n'est pas orientable. Montrer que si n est pair $\mathbb{R}P^n$ n'est pas orientable.

Exercice 4.

Montrer que les variétés suivantes sont orientables :

1. $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$.
2. Σ_g .
3. S^n .
4. $\mathbb{C}P^n$.
5. $\mathbb{R}P^{2n+1}$.

Exercice 5.

Le but de cet exercice est de comprendre la structure de cup-produit sur $\mathbb{R}P^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Rappeler les groupes de cohomologie de $\mathbb{R}P^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En déduire que l'on a un isomorphisme de groupes entre $H^*(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$.
2. On va montrer par récurrence sur n que l'on peut en fait obtenir un isomorphisme d'anneaux entre ces deux objets. Reprendre l'exercice 5 du TD précédent pour vérifier le cas $n = 2$.
3. Montrer que l'inclusion $\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ induit un isomorphisme sur les H^i pour $i \leq n-1$.
4. En déduire qu'il suffit de montrer que le cup produit d'un générateur de $H^{n-1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et d'un générateur de $H^1(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un générateur de $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
5. On rappelle que les points de $\mathbb{R}P^n$ sont repérés par des coordonnées homogènes $[x_0 : \dots : x_n]$. On a une copie de $\mathbb{R}P^1$ donnée par $\Delta = \{[x_0 : x_1 : 0 : \dots : 0]\}$ et une copie de $\mathbb{R}P^{n-1}$ donnée par $\Pi = \{[0 : x_1 : \dots : x_n]\}$. Leur intersection est le point $p = [0 : 1 : 0 : \dots : 0]$. Rappeler pourquoi l'ouvert $U = \{x_1 \neq 0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ et donner l'image dans $\mathbb{R}^n$ des intersections de p et des intersections de U avec Δ et Π .
6. Montrer que $\mathbb{R}P^n \setminus \{p\}$ se rétracte par déformation sur $\Pi' = \{[x_0 : 0 : x_2 : \dots : x_n]\} \simeq \mathbb{R}P^{n-1}$. En déduire que l'application canonique $H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{p\}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est un isomorphisme (indication : utiliser la cohomologie cellulaire).
7. Montrer que l'application donnée par l'inclusion de paires $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \simeq (U, U \setminus \{p\})$ dans $(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{0\})$ induit un isomorphisme

$$H^n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^n \setminus \{p\}) \rightarrow H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

8. Soit $i = 1$ ou $n - 1$, montrer que les applications naturelles ci-dessous sont des isomorphismes (où l'on sous-entend que l'on travaille à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^*$) :

$$H^i(\mathbb{RP}^i) \leftarrow H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^{i-1}) \leftarrow H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^i \setminus \{p\}) \rightarrow H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}).$$

9. Montrer (en utilisant le cohomologie cellulaire) que les flèches du carré suivant sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccc} H^i(\mathbb{RP}^n) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{i-1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{RP}^i) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^{i-1}). \end{array}$$

10. Montrer que $\mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-i}$ se rétracte par déformation sur $\mathbb{RP}^{i-1}$. En déduire que toutes les flèches du diagramme suivant sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} H^i(\mathbb{RP}^n) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-i}) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^i) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^i(\mathbb{RP}^i) & \longleftarrow & H^i(\mathbb{RP}^i, \mathbb{RP}^i \setminus \{p\}) & \longrightarrow & H^i(\mathbb{R}^i, \mathbb{R}^i \setminus \{0\}). \end{array}$$

11. Montrer que le diagramme suivant commute et que ses colonnes sont des isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} H^1(\mathbb{RP}^n) \times H^{n-1}(\mathbb{RP}^n) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{RP}^n) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^1(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^{n-1}) \times H^{n-1}(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \mathbb{RP}^1) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^n \setminus \{p\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1}) \times H^{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^1) & \xrightarrow{\quad \smile \quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \end{array}$$

12. Déduire le résultat à l'aide de la formule de Künneth appliquée à la ligne du bas dans le diagramme précédent.

*on le sous-entendra d'ailleurs pour le reste de l'exercice