SOLUTIONS DU PARTIEL – 26 février 2025

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (On ne demande pas de justification).

(a) Si ∇ et ∇' sont deux connexions sur un fibré vectoriel E, alors l'opérateur $\nabla+\nabla'$ est une connexion sur E également.

(b) Soit S^1 le cercle unité, et $M=S^1\times\mathbb{R}$ le cylindre muni de la métrique Riemannienne g qui est la restriction de la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $q\in M$, il existe de coordonnées locales x,y dans un voisinage $U\subset M$ de q telles que $g|_U=\mathrm{d}x\otimes\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\otimes\mathrm{d}y$.

(c) Il existe une application lisse $f:M\to S^n$, où M est une variété différentiable (non-vide) de dimension $\dim(M)<n$, et un fibré vectoriel $E\to S^n$ tels que le tiré en arrière $f^*E\to M$ n'est pas un fibré trivial.

(d) Soit (M,g) une surface riemannienne orientée, $\rho:M\to\mathbb{R}$ une fonction lisse, et $h=e^\rho g$ une deuxième métrique riemannienne conforme à g. Alors, une fonction arbitraire $f\in C^\infty(M)$ est harmonique pour g si et seulement si elle est harmonique pour h.

Solution.

(a) Faux. La somme de deux connexions ne satisfait pas la règle de Leibnitz : pour tout champs de vecteurs X sur la base du fibré et pour toute section s du fibré, on a plutôt

$$(\nabla+\nabla')_X(fs)=2(Xf)s+f(\nabla+\nabla')_X(s).$$

(b) Vrai. Autour de chaque $q=(\cos(\theta),\sin(\theta),z)\in M$, les coordonnées

$$(x,y)\mapsto(\cos(\theta+x),\sin(\theta+x),y)$$

centrées en q ont la propriété cherchée.

(c) Faux. Comme $m>\dim(M)$, tout point $x\in M$ est un point critique de f. Par le théorème de Sard, f n'est pas surjective. Soit $y\in S^n$ un point qui n'est pas dans l'image de f. Alors on a $f=\iota\circ h$, où $h:M\to S^n\setminus\{y\}$ et $\iota:S^n\setminus\{y\}\hookrightarrow S^n$ est l'inclusion. Soit $E\to S^n$ un fibré vectoriel arbitraire. Comme $S^n\setminus\{y\}$ est difféomorphe à la boule ouverte B^n, il est contractile, et le fibré vectoriel $\iota^*E\to S^n\setminus\{y\}$ est triviale. Alors $f^*E\cong h^*\iota^*E$ est triviale également.

(d) Vrai. Si v_1,v_2 est une base g-orthonormale de T_xM, alors $e^{-\rho/2}v_1,e^{-\rho/2}v_2$ est une base h-orthonormale. Cela implique que les formes volume riemanniennes de g et h sont liées par la formule $\mathrm{vol}_h=e^\rho\mathrm{vol}_g$. Les opérateurs gradient associés à g et h sont liés par la formule $\nabla_g=e^\rho\nabla_h$. Pour tout $f\in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_g f\mathrm{vol}_g&=\mathrm{div}_g(\nabla_g f)\mathrm{vol}_g=\mathrm{d}(\mathrm{vol}_g(\nabla_g f,\cdot))=\mathrm{d}(\mathrm{vol}_h(\nabla_h f,\cdot))\\&=\mathrm{div}_h(\nabla_h f)\mathrm{vol}_h=\Delta_h f e^\rho\mathrm{vol}_g.\end{aligned}$$

Donc $\Delta_g=e^\rho\Delta_h$, et les deux métriques riemanniennes g et h définissent les mêmes fonctions harmoniques.

Exercice 2. Existe-t-il une variété riemannienne (M, g) avec une géodésique $\gamma : \mathbb{R} \to M$ telle que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$ et $\dot{\gamma}(t_0) = -\dot{\gamma}(t_1)$ pour certaines valeurs de t_0 et de t_1 ?

Solution. Si $t_0 < t_1$ et $\dot{\gamma}(t_0) = -\dot{\gamma}(t_1)$, alors $\gamma(t_0+t) = \gamma(t_1-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En dérivant cette identité par rapport à t en $t = (t_1-t_0)/2$, on obtient $\dot{\gamma}((t_0+t_1)/2) = -\dot{\gamma}((t_0+t_1)/2)$, et donc $\dot{\gamma}((t_0+t_1)/2) = 0$. Cela implique que γ est une courbe constante, et pas une géodésique.

Exercice 3. Soit ϕ une isométrie d'une variété riemannienne connexe sans bord (M, g) telle que $\phi(x) = x$ et $\mathrm{d}\phi(x) = \mathrm{id}$ pour un certain $x \in M$. Est-ce que ϕ est forcément l'identité ?

Solution. Une telle ϕ est forcement l'identité. Soit

$$U_x := \big\{ v \in \mathrm{T}_x M \ \big| \ \|v\|_g < \mathrm{inj}(x) \big\},$$

où $\mathrm{inj}(x)$ est le rayon d'injectivité en x. L'application exponentielle

$$\exp_x : U_x \to B(x, \mathrm{inj}(x)) \subset M$$

est un difféomorphisme. Comme l'image d'une géodésique par une isométrie est encore une géodésique, on a

$$\phi \circ \exp_x = \exp_x \circ \mathrm{d}\phi(x) = \exp_x,$$

et donc $\phi|_{B(x,\mathrm{inj}(x))} = \mathrm{id}$. En particulier, pour tout $y \in B(x, \mathrm{inj}(x))$, on a $\phi(y) = y$ et $\mathrm{d}\phi(y) = \mathrm{id}$, donc $\phi|_{B(y,\mathrm{inj}(y))} = \mathrm{id}$ aussi.

Pour conclure, il suffit de remarquer que, comme M est connexe, pour tout $z \in M$ il existe une courbe continue $\gamma : [0, 1] \to M$ et des valeurs $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ tels que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, et chaque restriction $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ est une géodésique de longueur inférieure à $\mathrm{inj}(\gamma(t_i))$. On peut produire un telle γ à partir d'une courbe continue $\zeta : [0, 1] \to M$ telle que $\zeta(0) = x$, $\zeta(1) = y$. On fixe un entier $n > \mathrm{inj}(\zeta([0, 1]))^{-1}$ et on pose $t_i := i/n$ et

$$\gamma(\tfrac{t_i+t}{n}) = \exp_{\zeta(t_i)}(t \exp^{-1}_{\zeta(t_i)}(\zeta(t_{i+1}))) \qquad \forall i = 0, ..., n-1, \ t \in [0, 1].$$

Exercice 4. Soit (M, g) une variété riemannienne avec connexion de Levi-Civita ∇, et α une 1-forme différentielle telle que $\nabla\alpha = 0$. Est-ce que α est fermée ? Prouver-le, ou fournir un contrexemple.

Solution. L'énoncé est vrai. Pour tout champs de vecteurs X, Y, on a

$$\begin{aligned}(\nabla_X\alpha)(Y) - (\nabla_Y\alpha)(X) &= X(\alpha(Y)) - \alpha(\nabla_X Y) - Y(\alpha(X)) - \alpha(\nabla_Y X) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X, Y]) \\ &= \mathrm{d}\alpha(X, Y).\end{aligned}$$

Donc $\nabla\alpha = 0$ implique $\mathrm{d}\alpha = 0$. Par ailleurs, l'énoncé est également vrai pour les p-formes d'un degré p quelconque, en on peut le démontrer de manière analogue grace à la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha(X_1, ..., X_{p+1}) = &\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^i X_i(\alpha(X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{p+1})) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq p+1}(-1)^{i+j}\alpha([X_i, X_j], X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_{j-1}, X_{j+1}, ...X_{p+1})).\end{aligned}$$

Exercice 5. Soit (M,g) une variété riemannienne, et $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. On note par ∇f son gradient, défini par $df = g(\nabla f, \cdot)$. Supposons que $\|\nabla f\|_g \equiv 1$, et soit $\gamma : [0,T] \to M$ une courbe qui est solution de l'EDO

$$\dot{\gamma} = \nabla f \circ \gamma.$$

Lesquels des énoncés suivants est vrai ?

(i) γ est une géodésique, et la courbe la plus courte qui relie ses extrémités.

(ii) γ est une géodésique, mais pas forcement la courbe la plus courte qui relie ses extrémités.

(iii) Il existe un exemple d'une telle fonction f sur une variété riemannienne telle que γ n'est pas une géodésique.

Solution. L'enoncé correct est le (i). Tout courbe lisse $\zeta : [0,T] \to M$ telle que $\zeta(0) = \gamma(0)$ et $\zeta(T) = \gamma(T)$ a une longueur

$$\begin{aligned} L(\zeta) &= \int_0^T \|\dot{\zeta}(t)\|_g \mathrm{d}t \geq \int_0^T |g(\nabla f(\zeta(t)), \dot{\zeta}(t))| \,\mathrm{d}t \geq \int_0^T \mathrm{d}f(\zeta(t))\dot{\zeta}(t))\,\mathrm{d}t \\ &= f(\zeta(T)) - f(\zeta(0)) = \int_0^T \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \underbrace{\|\dot{\gamma}(t)\|_g^2}_{=1}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \|\dot{\gamma}(t)\|_g \mathrm{d}t = L(\gamma). \end{aligned}$$

En particulier, γ est un point critique de L sur l'espace des courbes qui relient $\gamma(0)$ et $\gamma(T)$. Comme $\|\dot{\gamma}\|_g \equiv 1$, on conclut que γ est une géodésique.

Exercice 6. Soit (M,g) une surface riemannienne orientée, ∇ sa connexion de Levi-Civita, et $J \in \mathrm{End}(\mathrm{T}M)$ l'endomorphisme du fibré tangent qui agit sur chaque T_xM comme une rotation d'un angle positif $\pi/2$, i.e. pour tout vecteur non nul $v \in \mathrm{T}_xM$, on a $\|Jv\|_g = \|v\|_g$, $g(Jv,v)=0$, et v, Jv est une base orientée de T_xM. Calculer la dérivée covariante ∇J.

Solution. Soient X, Y deux champs de vecteurs arbitraires sur M. En dérivant l'identité $g(JX,X) \equiv 0$ par rapport à Y, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= Y(g(JX,X)) = g(\nabla_Y(JX),X) + g(JX,\nabla_Y X)\\
&= g((\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y X),X) + g(JX,\nabla_Y X)\\
&= g((\nabla_Y J)X,X) + \underbrace{g(J(\nabla_Y X),X) + g(JX,\nabla_Y X)}_{=0} = g((\nabla_Y J)X,X).
\end{aligned}$$

On déduit $\nabla_Y J = fJ$ pour une certain fonction $f : M \to \mathbb{R}$. En dérivant l'identité $\|JX\|_g^2 - \|X\|_g^2 \equiv 0$ par rapport à Y, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= Y(\|JX\|_g^2 - \|X\|_g^2) = 2g(\nabla_Y(JX),JX) + 2g(\nabla_Y X,X)\\
&= 2g((\nabla_Y J)X + J(\nabla_Y X),JX) + 2g(\nabla_Y X,X)\\
&= 2g(\underbrace{(\nabla_Y J)X}_{=fJX},JX) + 2\,\underbrace{g(J(\nabla_Y X),JX)}_{=g(\nabla_Y X,X)} + 2g(\nabla_Y X,X) = f\|X\|_g^2 + 2Y\|X\|_g^2.
\end{aligned}$$

En choisissant le champs de vecteurs X tel que $\|X\|_g \equiv 1$, on conclut que $f \equiv 0$. Comme Y est arbitraire, on a prouvé que $\nabla J = 0$.