TD9 Géométrie Riemannienne

28 Mars 2025

1. Soient (M, g) une variété riemannienne, (N, h) une variété riemannienne connexe, et $f : M \to N$ une isométrie locale.

a) Supposons que M est complète et que deux points quelconques de N peuvent être reliés par une unique géodésique de N. Prouvez que f est une isométrie globale.

b) Supposons maintenant que N est complète. M est-elle nécessairement complète ?

2. Soit G un groupe de Lie muni d'une métrique bi-invariante g. Soient $X, Y, Z \in \mathcal{X}(G)$ des champs de vecteurs invariants à gauche et de norme unitaire sur G.

a) Rappelez que $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. Calculez $R(X, Y)Z$.

b) Supposons que X et Y sont orthonormés, et soit P le plan engendré par X et Y. Montrez que

$$\kappa_g(P) = \frac{1}{4} \parallel [X, Y] \parallel_g^2$$

c) Classifiez les groupes de Lie plats (munis d'une métrique bi-invariante).

3. Soit (M, g) une variété riemannienne, telle que pour tous $p, q \in M$, le transport parallèle de p à q ne dépende pas de la courbe joignant p à q. Prouvez que la courbure de M est identiquement nulle.

4. Identifions $\mathbb{R}^4$ à $\mathbb{C}^2$ et définissons la sphère unité

$$\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2, \mid z \mid^2 + \mid w \mid^2 = 1\}$$

et soit

$$h : (z, w) \in \mathbb{S}^3 \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{q}} z, e^{\frac{2\pi r i}{q}} w) \in \mathbb{S}^3$$

où q et r sont des entiers premiers entre eux et $q \geq 3$.

a) Montrez que $G =< h >$ est un sous-groupe du groupe des isométries de $\mathbb{S}^3$ qui agit proprement discontinuement. La variété quotient est appelée un espace lenticulaire.

b) Considérons $\mathbb{S}^3/G$ avec la métrique induite par la projection $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3/G$. Montrez que toutes les géodésiques de $\mathbb{S}^3/G$ sont fermées mais peuvent avoir des longueurs différentes.