MESURE DE MAHLER ET SÉRIE L D'UNE SURFACE $K3$ SINGULIÈRE

MARIE JOSÉ BERTIN

Résumé Nous présentons un exemple de polynôme définissant une surface $K3$ singulière dont la mesure de Mahler s'exprime comme somme de la série L de la surface et d'un terme proportionnel à la mesure des faces.

Abstract. We give an example of a polynomial in three variables defining a singular $K3$-surface, whose logarithmic Mahler measure is expressed as a linear combination of the L-series of the surface and a Dirichlet L-series associated to the faces.

1. Introduction

La mesure de Mahler logarithmique $m(P)$ d'un polynôme de Laurent $P \in \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, ..., X_n^{\pm 1}]$ a été introduite par Mahler en 1962 pour mesurer la taille de certains facteurs d'un polynôme. Elle s'exprime à l'aide d'une intégrale

$$m(P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log |P(x_1, ..., x_n)| \frac{dx_1}{x_1} ... \frac{dx_n}{x_n}$$

où $\mathbb{T}^n$ désigne le n-tore $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n / |x_1| = ... = |x_n| = 1\}$.
La mesure de Mahler $M(P)$ est alors

$$M(P) := \exp(m(P)).$$

Pour $n = 1$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire, on déduit de la formule de Jensen

$$M(P) = \prod_{P(\alpha)=0} \max(|\alpha|, 1).$$

On remarque dans ce cas que $M(P)$ n'est autre que la quantité $\Omega(P)$ définie par Lehmer dans un article de 1933 [17] où il pose la célèbre question: existe-t-il un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$, unitaire, non produit de polynômes cyclotomiques vérifiant

$$1 < M(P) < M(P_0) = 1,1762\cdots,$$

où

$$P_0(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

est le polynôme de Lehmer.
La question de Lehmer est toujours ouverte. Seule une réponse partielle a été donnée par Smyth en 1971 [35], $M(P) > 1,32\cdots$ mais sous l'hypothèse très forte

Date: February 16, 2010.
1991 *Mathematics Subject Classification.* 11R06,14D,14J27,14J28.
Key words and phrases. Modular Mahler's Measure, Eisenstein-Kronecker Series, L-series of K3 hypersurfaces.

P non réciproque. Cette question a suscité de nombreuses recherches. Je veux seulement citer un résultat remarquable de Boyd [8]

$$\lim_{n\to\infty} M(P(x,x^n)) = M(P(x,y))$$

lorsque la limite porte sur une infinité de termes. Ce résultat laissait espérer une réponse à la question de Lehmer si l'on trouvait des polynômes de 2 variables de petite mesure. Aussi Boyd [9] évalua-t-il numériquement

$$m((x+1)y^2+(x^2+x+1)y+x(x+1)) = 0,2274\cdots$$

$$m(y^2+(x^2+x+1)y+x^2) = 0,2513\cdots.$$

$(m(P_0 = \ln(1,1762\cdots) \simeq 0,162288\cdots)$
Smyth prouvait également [9]

$$m(x+y-1) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}L(\chi_{-3},2) = L'(\chi_{-3},-1),$$

$$L(\chi_{-3},s) = \sum_{n\geq 1}\frac{\chi_{-3}(n)}{n^2}$$

désignant la série de Dirichlet de caractère le symbole de Legendre $\chi_{-3}(n) = \left(\frac{-3}{n}\right)$ et

$$m(x+y+z+1) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3).$$

C'était le début des mesures de Mahler explicites.
Au même moment Bloch (1981) [7] comparait la valeur $L(E,2)$, de la série L en $s=2$ d'une courbe elliptique E, au second groupe de K-théorie $K_2(E)$ relié à des séries d'Eisenstein-Kronecker. Il cherchait des relations à coefficients rationnels entre $L(E,2)$ et des séries d'Eisenstein-Kronecker prises sur des points de torsion.
Quelques années plus tard, en 1996, Deninger [14] conjecturait

$$m(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+1) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2}L(E,2) = L'(E,0)$$

où E désigne la courbe elliptique de conducteur 15 définie par le polynôme; cependant Cassaigne et Maillot (1997) [19] prouvaient la relation

$$m(a+bx+cy) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(D(\frac{|a|}{|b|}e^{i\gamma}) + \alpha\log\mid a\mid + \beta\log\mid b\mid + \gamma\log\mid c\mid) \text{ si } \Delta \\ \max\{\log\mid a\mid, \log\mid b\mid, \log\mid c\mid\} \text{ si non } \Delta. \end{cases}$$

La condition Δ signifie que $\mid a\mid$, $\mid b\mid$, $\mid c\mid$ sont les côtés d'un triangle d'angles α, β, γ et D désigne le dilogarithme de Bloch-Wigner.
En fait, le point commun de tous ces résultats est l'expression de la mesure de Mahler d'un polynôme de deux variables en termes de dilogarithmes, dilogarithmes de Bloch et Wigner pour les courbes de genre 0, dilogarithmes elliptiques pour les courbes E de genre 1 définies par un polynôme vérifiant certaines conditions permettant de relier leur mesure de Mahler au $K_2(E)$. Donc ces résultats sont en relation avec les groupes de Bloch de corps de nombres en genre 0, de courbes elliptiques en genre 1 [2] [5].
Les travaux de Boyd fournissent de nombreux résultats expérimentaux de formules explicites de mesure de Mahler en deux variables. Peu de formules sont démontrées

à l'heure actuelle. Citons cependant les travaux de Rodriguez-Villegas [26] [27], Lalin [18], Rogers [18], Brunault [13], Mellit [21].
Pour préciser encore le contexte de notre travail, je parlerai des conjectures de Rodriguez-Villegas (2004) [11] justifiées par le point de vue de Maillot (2003) [20]

$$m(1+x+y+z+t) \stackrel{?}{=} cL(f,3)$$

avec f forme parabolique de poids 3 de conducteur 15, la constante c dépendant du conducteur. La série $L(f,3)$ est également la série L de la surface $K3$ définie par

$$\begin{cases} 1+x+y+z+t=0 \\ 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}=0. \end{cases}$$

De même

$$m(1+x+y+z+t+w) \stackrel{?}{=} c_1 L(g,4)$$

avec g forme parabolique de poids 4, de conducteur 6 liée à la série L de la quintique de Barth-Nieto.
L'idée de Maillot [20] utilise un résultat de Darboux (1875): la mesure de Mahler d'un polynôme P non réciproque, intégrale d'une forme différentielle sur une variété est en fait une intégrale sur une variété plus petite, intersection de la variété définie par P et par son polynôme réciproque P^*. La forme de l'expression de la mesure de Mahler est contenue dans la cohomologie de la plus petite variété.
Dans la première formule de Smyth en deux variables, la "petite variété" est une courbe de genre 0; par suite la mesure de Mahler s'exprime à l'aide d'une série L de Dirichlet. Dans la deuxième formule de Smyth en trois variables, la "petite variété" est l'intersection de trois plans d'où l'expression en $\zeta(3)$. Dans la première conjecture de Rodriguez-Villegas, la "petite variété" est la surface $K3$ modulaire étudiée par Peters, Top, Van der Vlugt définie par un polynôme réciproque [25]. Sa série L est la série L de la forme modulaire f. Dans la dernière conjecture on trouve un lien avec la quintique de Barth-Nieto.
Ces quelques exemples et conjectures soulignent l'importance de connaître les mesures de Mahler explicites de polynômes réciproques. C'est pour cela que j'ai orienté mes recherches vers la détermination des mesures de Mahler explicites des polynômes

$$P_k = x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}+z+\frac{1}{z}-k, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Ces polynômes définissent des surfaces $K3$ notées Y_k dont le nombre de Picard générique est 19 [24]. Dans des articles précédents [4], nous avons exprimé $m(P_k)$ comme une somme de séries d'Eisenstein-Kronecker et relié $m(P_2)$ et $m(P_3)$ aux séries L des variétés correspondantes Y_2 et Y_3. Nous allons traiter ici le cas $k=10$. Les polynômes P_2, P_3 et P_{10} appartiennent au sous-ensemble des polynômes P_k définissant une surface $K3$ singulière, c'est-à-dire de nombre de Picard 20. Ce sous-ensemble a été déterminé expérimentalement par Boyd et confirmé par une preuve de Schütt [12], [29].
Comme on l'explique dans [3], la dérivée de la mesure de Mahler par rapport au paramètre est une période de la surface $K3$; ainsi seul le réseau transcendant intervient pour la mesure de Mahler. Lorsque le nombre de Picard de la variété est 20, le réseau transcendant est de dimension 2 et la série L de la variété correspond à un morceau de dimension 2 du H^2 de dimension 22 de la surface $K3$, qui est précisément le réseau transcendant.

Après avoir rappelé brièvement les définitions et résultats nécessaires, nous prouverons le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit* Y_{10} *l'hypersurface* $K3$ *associée au polynôme* P_{10}

$$P_{10} = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + t^2(xy + xz + yz) - 10xyzt.$$

Si $L(Y_{10}, s)$ *désigne la série* L *de l' hypersurface* Y_{10}*, on a les relations suivantes.*
1)

$$L(Y_{10}, 3) = \frac{1}{2} {\sum_{k,m}}' \frac{k^2 - 2m^2}{(k^2 + 2m^2)^3} = L(f, 3),$$

où f *est la* CM*-newform de poids* 3 *et niveau* 8 *donnée dans les tables de Schütt [*[28]*, Table 1],*

$$f = q - 2q^2 - 2q^3 + 4q^4 + 4q^6 - 8q^8 - 5q^9 + 14q^{11} - 8q^{12} + 16q^{16} + 2q^{17} + 10q^{18} - 34q^{19} + \cdots .$$

2) Définissons comme dans [4]

$$d_3 := \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^3} {\sum_{m,k}}' \frac{1}{(m^2 + 3k^2)^2}.$$

La mesure de Mahler et la série L *satisfont l'égalité*

$$m(P_{10}) = 2d_3 + \frac{1}{9} \frac{|\det T_{Y_{10}}|^{3/2}}{\pi^3} L(Y_{10}, 3),$$

où $T_{Y_{10}}$ *désigne le réseau transcendant de la surface* Y_{10}*.*

Remarque 1.
(1) *Boyd avait remarqué que les deux quotients de période* τ_2 *et* τ_{10} *(voir section 2) appartenaient au même corps quadratique imaginaire* $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$*. Aussi avait-il deviné une relation de la forme*

$$m(P_{10}) \stackrel{?}{=} 2d_3 + 3m(P_2).$$

Cette relation est actuellement prouvée grâce aux résultats de [4] *et du présent papier.*

(2) *Les séries* L *des deux surfaces* $K3$ *à savoir* Y_2 *et* Y_{10} *sont les mêmes. Aussi, d'après la conjecture de Tate, on devrait avoir une correspondance algébrique entre* Y_2 *et* Y_{10}*.*

2. Rappels

Pour les principales définitions sur les surfaces $K3$ utiles dans ce travail, on pourra consulter [3]. Pour une présentation plus approfondie on pourra lire [37].

2.1. Mesure de Mahler des polynômes P_k.

Rappelons le théorème principal.

Théorème 2. [3] *Soit* $k = t + \frac{1}{t}$ *et*

$$t = \left(\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)}\right)^6, \;\; \eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n \geq 1} (1 - e^{2\pi i n \tau}), \;\; q = \exp 2\pi i \tau.$$

Alors

$$\begin{aligned}
m(P_k) =& \frac{\Im\tau}{8\pi^3}\{\sum_{m,\kappa}{}' (-4(2\Re\frac{1}{(m\tau+\kappa)^3(m\bar\tau+\kappa)}+\frac{1}{(m\tau+\kappa)^2(m\bar\tau+\kappa)^2})\\
&+16(2\Re\frac{1}{(2m\tau+\kappa)^3(2m\bar\tau+\kappa)}+\frac{1}{(2m\tau+\kappa)^2(2m\bar\tau+\kappa)^2})\\
&-36(2\Re\frac{1}{(3m\tau+\kappa)^3(3m\bar\tau+\kappa)}+\frac{1}{(3m\tau+\kappa)^2(3m\bar\tau+\kappa)^2})\\
&+144(2\Re\frac{1}{(6m\tau+\kappa)^3(6m\bar\tau+\kappa)}+\frac{1}{(6m\tau+\kappa)^2(6m\bar\tau+\kappa)^2}))\}.
\end{aligned}$$

2.2. **La série L d'une surface $K3$.** Soit V une variété projective lisse de dimension d sur un corps fini à $q=p^n$ éléments. On suppose en outre V géométriquement irréductible, c'est-à -dire irréductible sur toute clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Soit N_n le nombre de points de V dans $\mathbb{F}_q$.
La fonction zéta attachée à V est définie par

$$Z_V(T) := \exp\left(\sum_{n\geq 1} N_n \frac{T^n}{n}\right).$$

D'après les conjectures de Weil (1949) prouvées par Dwork (1960) et Deligne (consulter par exemple [15]), $Z_V(T)$ est une fonction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}$ satisfaisant l'équation fonctionnelle

$$Z_V\left(\frac{1}{q^dT}\right) = \pm(q^{d/2}T)^c Z_V(T)$$

pour un certain $c\in\mathbb{N}$.
Si V est une surface $K3$ algébrique définie sur $\mathbb{Q}$, alors pour presque tout p, sa réduction modulo p est encore une surface $K3$ notée V_p. De plus $Z_{V_p}(T)$ est de la forme

$$Z_{V_p}(T) = \frac{1}{(1-T)(1-p^2T)P_2(T)}$$

avec $P_2(T)$ polynôme de degré 22 satisfaisant $P_2(0)=1$ et

$$P_2(T) = Q_p(T)R_p(T),$$

le polynôme $R_p(T)$ provenant des cycles algébriques, $R_p(\frac{T}{p})\in\mathbb{Z}[T]$, et $Q_p(T)$ provenant des cycles transcendants. Sous certaines conditions, la partie $H^{1,1}$ de la décomposition de Hodge du H^1 a une dimension 20 dans $H^2(V,\mathbb{Z})$. Dans ce cas, la surface $K3$ est singulière, autrement dit son nombre de Picard ρ vaut 20 et son réseau transcendant est de rang 2.
Plus précisément, si F_p désigne l'opérateur de Frobénius, on a

$$P_2(T) = \det\left(1-TF_p \mid H^2_{et}(V,\mathbb{Q}_l)\right).$$

Comme

$$H^2_{\mathrm{et}}(V,\mathbb{Q}_l) = H^2_{\mathrm{alg}}(V,\mathbb{Q}_l) + H^2_{\mathrm{tr}}(V,\mathbb{Q}_l),$$

si l'on note

$$N_p = \#V_p(\mathbb{F}_p)$$

on a la formule

$$N_p = 1+p^2+\mathrm{Tr}H^2_{\mathrm{alg}}(V,\mathbb{Q}_l)+\mathrm{Tr}H^2_{\mathrm{tr}}(V,\mathbb{Q}_l).$$

La quantité $\mathrm{Tr}H^2_{\mathrm{alg}}(V,\mathbb{Q}_l)$ correspond aux 20 cycles algébriques engendrant le groupe de Néron-Severi de V. Son expression dépend du nombre de cycles algébriques définis sur $\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{F}_{p^2}$.
La quantité $\mathrm{Tr}H^2_{\mathrm{tr}}(V,\mathbb{Q}_l)$ correspond aux cycles transcendants.
Par exemple, si les 20 générateurs du groupe de Néron-Severi de la surface $K3$ singulière sont définis sur $\mathbb{F}_p$ (c'est le cas pour Y_2 par exemple [4]) alors

$$P_2(T) = (1-pT)^{20}(1-\beta T)(1-\beta' T)$$

et

$$N_p = 1 + p^2 + 20p + \beta + \beta'.$$

La philosophie de Langlands dit que l'on peut définir $Q_p(T)$ pour p divisant le déterminant N du réseau transcendant, de telle sorte que

$$Z(V,s) := \prod_p \frac{1}{Q_p(p^{-s})} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

soit la série de Dirichlet d'une forme modulaire parabolique.
Par exemple [34], si l'équation affine de la surface est

$$t^2(x+y)(x+z)(y+z) + xyz = 0,$$

la forme parabolique de poids 3 et de niveau $N = 8$ est

$$f(z) = \eta(z)^2\eta(2z)\eta(4z)\eta(8z)^2 \in S_3(\Gamma_0(8), \epsilon_8)$$

où ϵ_8 est le caractère associé à $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

2.3. **Deux résultats de Shioda.** Rappelons l'essentiel concernant les surfaces elliptiques. On pourra consulter l'article de Shioda [31] mais aussi [32], [33].
1) Soit $\Phi : X \to \mathbb{P}^1$ une surface elliptique avec une section. Considérons les sections de cette fibration elliptique, c'est-à-dire déterminées par les points rationnels de la courbe elliptique correspondante définie sur le corps des fonctions rationnelles en s. On note $r(\Phi)$ le rang du groupe des sections. Alors le nombre de Picard $\rho(X)$ satisfait l'équation

$$\rho(X) = r(\Phi) + 2 + \sum_{\nu=1}^{h}(m_\nu - 1) \tag{1}$$

où h est le nombre de fibres singulières et m_ν le nombre de composantes irréductibles de la fibre singulière correspondante.
2) Soit $(X, \Phi, \mathbb{P}^1)$ une surface elliptique avec une section Φ, sans courbe exceptionnelle de première espèce (i.e. de self-intersection -1). Notons $NS(X)$ le groupe de Néron-Severi des classes d'équivalence algébrique des diviseurs de X.
Soit s le point générique de $\mathbb{P}^1$ et $\Phi^{-1}(s) = E$ la courbe elliptique définie sur $K = \mathbb{C}(s)$ avec le point rationnel $o = o(s)$. Alors, $E(K)$ est un groupe abélien de type fini si $j(E)$ est transcendant sur $\mathbb{C}$.
Soit r le rang de $E(K)$ et $s_1, ..., s_r$ les générateurs de $E(K)$ modulo la torsion. En outre, le groupe $E(K)_{tors}$ est engendré par au plus deux éléments t_1 d'ordre e_1 et t_2 d'ordre e_2 tels que $1 \leq e_2$, $e_2|e_1$ et $\mid E(K)_{tors} \mid = e_1e_2$. Le groupe $E(K)$ des points K-rationnels de E est canoniquement identifié avec le groupe des sections de X sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Pour $s \in E(K)$, on note (s) la courbe image dans X de la section correspondant à s.

Définissons

$$D_\alpha := (s_\alpha) - (o) \quad 1 \leq \alpha \leq r$$
$$D'_\beta := (t_\beta) - (o) \quad \beta = 1, 2.$$

Considérons maintenant les fibres singulières de X sur $\mathbb{P}^1$. On pose

$$\Sigma := \{v \in \mathbb{P}^1 / C_v = \Phi^{-1}(v) \ \text{ soit une fibre singulière}\}$$

et pour tout $v \in \Sigma$, $\Theta_{v,i}$, $0 \leq i \leq m_v - 1$, les m_v composantes irreducibles de C_v. Soit $\Theta_{v,0}$ l'unique composante de C_v passant par $o(v)$.
On peut donc écrire

$$C_v = \Theta_{v,0} + \sum_{i \geq 1} \mu_{v,i} \Theta_{v,i}, \qquad \mu_{v,i} \geq 1.$$

Soit A_v la matrice d'ordre $m_v - 1$ dont l'élément d'indice (i,j) est $(\Theta_{v,i} \cdot \Theta_{v,j})$, $i, j \geq 1$, où $(D \cdot D')$ est le nombre d'intersection des diviseurs D et D' sur X. Finalement f désignera une fibre non singulière, i.e. $f = C_{u_0}$ pour $u_0 \notin \Sigma$.

Théorème 3. *Le groupe de Néron-Severi $NS(X)$ de la surface elliptique X est engendré par les diviseurs suivants*

$$f, \Theta_{v,i} \quad (1 \leq i \leq m_v - 1, \quad v \in \Sigma)$$
$$(o), D_\alpha \quad 1 \leq \alpha \leq r, \quad D'_\beta \quad \beta = 1, 2.$$

Les seules relations entre ces diviseurs sont au plus deux relations

$$e_\beta D'_\beta \approx e_\beta (D'_\beta \cdot (o)) f + \sum_{v \in \Sigma} (\Theta_{v,1}, ..., \Theta_{v,m_v-1}) e_\beta A_v^{-1} \begin{pmatrix} (D'_\beta \cdot \Theta_{v,1}) \\ . \\ . \\ . \\ (D'_\beta \cdot \Theta_{v,m_v-1}) \end{pmatrix}$$

où $\approx$ signifie l'équivalence algébrique.

3. Preuve du théorème

Une preuve de ce théorème a déjà été donnée par Bertin [6].
La preuve donnée ici permet de faire l'économie du calcul de la matrice de Gram des générateurs du groupe de Néron-Severi dont la valeur absolue du déterminant est le discriminant N_{10} de la surface K3. Ce discriminant est essentiel pour le calcul de la série L de Y_{10}. Nous aurons également besoin d'un lemme basé sur le modèle de Néron de courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}(s)$ pour déterminer si les composantes des fibres singulières sont définies sur $\mathbb{F}_p$ ou $\mathbb{F}_{p^2}$.
Dans cette nouvelle preuve nous compterons de manière différente les points de $Y_{10}(\mathbb{F}_p)$. Ceci sera explicité dans le lemme 2.
La preuve repose sur trois ingrédients:

- le théorème de modularité de Livné,
- la classification de Schütt des formes modulaires CM de poids 3 à coefficients rationnels,
- le critère de Serre-Livné permettant de comparer les séries L associées à deux représentations l-adiques rationnelles.

Nous allons donc rappeler ces trois théorèmes.

Théorème 4. *(Théorème de modularité de Livné* [15]*)*
Soit S une surface $K3$ définie sur $\mathbb{Q}$, de nombre de Picard 20 de discriminant N. Son réseau transcendant $T(S)$ est un $Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module de dimension 2 définissant une série L, notée $L(T(S), s)$.
Alors il existe une forme modulaire de poids 3 à multiplication complexe sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ satisfaisant

$$L(T(S), s) \doteq L(f, s)$$

($\doteq$ signifie à un facteur rationnel près).
En outre, si $NS(S)$ est engendré par des diviseurs définis sur $\mathbb{Q}$

$$L(S, s) \doteq \zeta(s-1)^{20} L(f, s).$$

Théorème 5. *(Classification de Schütt des surfaces $K3$* [28]*)*
Considérons les classifications suivantes des surfaces $K3$ singulières définies sur $\mathbb{Q}$

(1) *par le discriminant d du réseau transcendant de la surface à facteurs carrés près,*
(2) *par la newform associée à twist près,*
(3) *par le niveau de la newform associée à facteurs carrés près,*
(4) *par le corps CM, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, de la newform associée.*

Alors toutes ces classifications sont équivalentes. En particulier, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ a pour exposant 1 ou 2.

Nous rappellerons plus tard le critère de Serre-Livné.

3.1. **Détermination de N_{10} à facteur carré près.** Notons N_{10} le discriminant de la surface Y_{10} c'est-à-dire le déterminant de son réseau transcendant et Y_λ une surface $K3$ de notre famille. Nous allons utiliser des arguments développés dans Verrill [36] et Peters-Stienstra [24]. Le comportement de Y_λ, quand $\lambda \in \mathbb{C}$ varie, est donné par sa structure de Hodge.
Rappelons que si Y_λ est une surface $K3$, il existe à scalaire près, une unique 2-forme $\omega_\lambda \in H^{2,0}(Y_\lambda, \mathbb{C})$. Si $\{\gamma_{1,\lambda}, \cdots, \gamma_{22,\lambda}\}$ est une base de $H_2(Y_\lambda, \mathbb{Z})$ alors $\{\gamma^*_{1,\lambda}, \cdots, \gamma^*_{22,\lambda}\}$ est la base duale correspondante dans $H^2(Y_\lambda, \mathbb{C})$, duale pour le produit d'intersection. Autrement dit, si $\gamma \in H_2(Y_\lambda, \mathbb{Z})$, on définit $\gamma^* \in H^2(Y_\lambda, \mathbb{Z})$ tel que pour tout $\alpha \in H_2(Y_\lambda, \mathbb{C})$)

$$\int_\alpha \gamma^* = (\gamma \cdot \alpha)$$

où $(\gamma \cdot \alpha)$ est le nombre d'intersection des deux cycles α et γ. L'intersection des cycles d'homologie vérifie la dualité de Poincaré pour le produit extérieur en cohomologie i.e. $\forall \alpha, \gamma \in H_2(Y_\lambda, \mathbb{Z})$, on a

$$(\gamma \cdot \alpha) = \int_{Y_\lambda} \alpha^* \wedge \gamma^*.$$

Donc la matrice d'intersection de la base duale est aussi la matrice d'intersection du réseau des cycles transcendants $T(Y_\lambda) = \mathrm{Pic}(Y_\lambda)^\perp$. Pour notre famille, la matrice du réseau transcendant T dans la base $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ est donnée par Peters-Stienstra [24]

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme l'intégrale de ω_λ sur tout cycle algébrique est nulle, si l'on identifie $H_2(Y_\lambda,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ et $H^2(Y_\lambda,\mathbb{C})$ alors $\omega_\lambda \in T(Y_\lambda)\otimes\mathbb{C}$.
Donc $\omega_\lambda \in H^{2,0}$ s'écrit

$$\omega_{\lambda(\tau)} = a(\tau)\gamma_1^* + b(\tau)\gamma_2^* + c(\tau)\gamma_3^*$$

avec

$$12b(\tau)^2 + 2a(\tau)c(\tau) = 0,$$

car $\omega_\tau \wedge \omega_\tau \in H^{(4,0)} = (0)$.
On en déduit que l'élément

$$\omega(\tau) = G(\tau)\gamma_1 + \tau G(\tau)\gamma_2 - 6\tau^2 G(\tau)\gamma_3$$

appartient à $T(Y_{\lambda(\tau)})$. Ici $\{G(\tau), \tau G(\tau), \tau^2 G(\tau)\}$ satisfaitl'équation différentielle de Picard-Fuchs des périodes de la famille.
Par suite, dire que X_λ est de nombre de Picard 20 est équivalent à l'existence d'un vecteur $p\gamma_1+q\gamma_2+r\gamma_3 \in T_\lambda$ devenant algébrique, donc vérifiant $\int_{p\gamma_1+q\gamma_2+r\gamma_3}\omega(\tau) = 0$, soit

$$-6p\tau^2 + 12q\tau + r = 0.$$

Donc τ vérifie une équation quadratique sur $\mathbb{Q}$ dont le coefficient du terme de plus haut degré est un diviseur de 6 si l'on normalise le vecteur avec $p = 1$.
Pour la surface Y_{10} on a $2\tau^2 + 1 = 0$. On en déduit que le vecteur $\gamma_1 - 3\gamma_3 \in T_\lambda$ devient algébrique dans Y_{10}.
Choisissons alors une nouvelle base orthogonale de T_{10},

$$\{\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'\} = \{\gamma_1 - 3\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1 + 3\gamma_3\}.$$

Dans cette base la matrice de Gram de T_{10} vaut

$$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne un sous-réseau de T_{10} de matrice de Gram

$$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

de déterminant 72.
On en déduit qu'à un facteur carré près, $N_{10} = 72$. Or d'après le théorème de Livné la surface Y_{10} est modulaire. D'après le théorème et le tableau de Schütt, le niveau de la CM-newform est 8. Par suite $N_{10} = 72 \quad \text{ou} \quad 8$.

Remarque 2. *Si l'on veut prouver que $N_{10} = 72$, on peut par exemple prendre la méthode donnée dans Bertin* [6] *ou bien utiliser un autre argument comme dans* 3.3.7.

3.2. **Fibres singulières.** La surface $K3$, Y_{10}, est un revêtement double de la surface elliptique rationnelle de Beauville [1] définie par

$$(x_1+y_1)(x_1+z_1)(y_1+z_1)+ux_1y_1z_1=0.$$

Rappelons la nature des fibres singulières de cette dernière:

$$\begin{array}{lll} \text{à} \quad u=\infty & \text{de type} & I_6 \\ \text{à} \quad u=0 & \text{de type} & I_3 \\ \text{à} \quad u=1 & \text{de type} & I_2 \\ \text{à} \quad u=-8 & \text{de type} & I_1. \end{array}$$

En coupant Y_{10} par l'hyperplan $t=s(x+y+z)$, on obtient, après simplification, la fibration elliptique

$$s^2(x+y)(x+z)(y+z)+(s^2-10s+1)xyz=0.$$

Posant alors $u=(s^2-10s+1)/s^2$, on déduit de ce qui précède, la nature des fibres singulières de cette fibration elliptique de la surface Y_{10}:

$$\begin{array}{llll} \text{à} \quad s=0 & & \text{de type} & I_{12} \\ \text{à} \quad s=\infty & & \text{de type} & I_2 \\ \text{à} \quad s=1/10 & & \text{de type} & I_2 \\ \text{à} \quad s=\alpha & (\alpha^2-10\alpha+1=0) & \text{de type} & I_3 \\ \text{à} \quad s=\beta & (\beta^2-10\beta+1=0) & \text{de type} & I_3 \\ \text{à} \quad s=1 & & \text{de type} & I_1 \\ \text{à} \quad s=1/9 & & \text{de type} & I_1. \end{array}$$

Puisque $\rho=20$ ([24]), il résulte de la formule de Shioda que $r=1$; pour décrire le groupe de Néron -Severi, nous devons chercher une section infinie sur la surface.
La surface Y_{10} possède 7 points doubles:

$$P_{01}=(1:0:0:0) \quad P_{02}=(0:1:0:0) \quad P_{03}=(0:0:1:0) \quad P_{04}=(0:0:0:1)$$

$$P_{12}=(1:-1:0:0) \qquad P_{13}=(1:0:-1:0) \qquad P_{23}=(0:1:-1:0).$$

Les points doubles P_{12}, P_{13}, P_{23} sont dans toutes les fibres singulières. Les points doubles P_{01}, P_{02}, P_{03} sont seulement dans la fibre singulière au-dessus de 0.
Les 4 droites $P_{01}P_{03}P_{13}$, $P_{02}P_{03}P_{23}$, $P_{01}P_{02}P_{12}$, $P_{12}P_{13}P_{23}$ d'équations respectives

$$y=0 \quad t=0 \qquad x=0 \quad t=0 \qquad z=0 \quad t=0 \qquad x+y+z=0 \quad t=0$$

passant chacune par trois points doubles et les droites $P_{03}P_{04}$, $P_{01}P_{04}$, $P_{02}P_{04}$ d'équations respectives

$$x=0 \quad y=0 \qquad y=0 \quad z=0 \qquad x=0 \quad z=0$$

passant chacune par deux points doubles, sont sur la surface.
On va compléter les générateurs de $NS(Y_{10})$ avec la section infinie (P_s).
Pour cela, nous utilisons le modèle de Weierstrass W_0 au voisinage de 0,

$$(W_0) \qquad Y_0^2+(s^2-10s+1)X_0Y_0=X_0(X_0-s^4)(X_0+s^2-10s^3)$$

déduit du modèle W_∞ au voisinage de l'infini,

$$(W_\infty) \qquad Y_\infty^2+(\sigma^2-10\sigma+1)X_\infty Y_\infty=X_\infty(X_\infty-1)(X_\infty+\sigma^2-10\sigma).$$

Le changement de variable

$$\begin{cases} x = \dfrac{-Y_\infty - (\sigma^2 - 10\sigma + 1)X_\infty}{X_\infty + \sigma^2 - 10\sigma} \\ \\ y = \dfrac{Y_\infty}{X_\infty + \sigma^2 - 10\sigma} \end{cases}$$

fait passer du modèle

$$(x+y)(x+1)(y+1) + (\sigma^2 - 10\sigma + 1)xy = 0$$

au modèle de Weierstrass W_∞.
Pour obtenir W_0 à partir de W_∞, il suffit de faire les changements

$$\sigma \mapsto \frac{1}{s}, \qquad X_\infty \mapsto \frac{X_0}{s^4}, \qquad Y_\infty \mapsto \frac{Y_0}{s^6}.$$

La section infinie a été trouvée par Lecacheux [16]. Nous donnons ses coordonnées dans le modèle W_∞

$$\begin{cases} X_\infty = \dfrac{-1}{432}(\sigma-5)^2(\sigma-2)^2(\sigma-8)^2 \\ \\ Y_\infty = \dfrac{1}{15552}\sqrt{-3}(\sigma^3 + \sigma^2(-15 + 4\sqrt{-3}) + \sigma(42 - 40\sqrt{-3}) + 40 + 4\sqrt{-3}) \\ \qquad (\sigma^2 + \sigma(-10 + \sqrt{-3}) + 13 - 5\sqrt{-3})(\sigma - 5 + \sqrt{-3})(\sigma-5)(\sigma-2)(\sigma-8). \end{cases}$$

3.3. **Corps de définition des fibres singulières.** Pour savoir si les composantes des fibres singulières sont définies sur $\mathbb{Q}$, nous devons connaître le début du modèle de Néron au voisinage de chaque s définissant une fibre singulière [22] ou, ce qui est équivalent le début de l'algorithme de Tate [30]. Cet algorithme repose sur le théorème suivant.

Théorème 6. *(Néron* [22]*) Soit W_s un modèle de Weierstrass d'une courbe elliptique définie sur $\mathbb{C}[s]$. Notons v la valuation s-adique. On suppose que $(W_s)_{s=0}$ possède un point double à tangentes distinctes et que $v(j(W_s)) = -m < 0$, ce qui équivaut à W_s de type I_m dans la classification de Kodaira.*
Alors pour tout entier $l > \frac{m}{2}$, il existe un modèle de Weierstrass $\mathcal{E}_s$ déduit de W_s par une transformation de la forme

$$X = x + qz \tag{2}$$

$$Y = y + ux + rz \tag{3}$$

$$Z = z \tag{4}$$

avec $q, \quad r, \quad u \in \mathbb{C}[s]$. Le modèle de Weierstrass $\mathcal{E}_s$ est donné par

$$Y^2Z + \lambda XYZ + \mu YZ^2 = X^3 + \alpha X^2 Z + \beta XZ^2 + \gamma Z^3,$$

les coefficients satisfaisant

$$v(\lambda^2 + 4\alpha) = 0, \quad v(\mu) \geq l, \quad v(\beta) \geq l, \quad v(\gamma) = m, \quad v(j(\mathcal{E}_s)) = -m.$$

Ce théorème est valable en toutes caractéristiques et si la caractéristique est différente de 2, est équivalent au début de l'algorithme de Tate [30].

Lemme 1. *On suppose W_s défini sur $\mathbb{Q}[s]$.*

(1) *Les composantes rationnelles de la fibre singulière I_m sont définies sur le corps de nombres $\mathbb{Q}(\sqrt{\lambda_0^2+4\alpha_0})$.*
(2) *Si $P_s = (X(s) : Y(s) : 1)$ est un point sur $\mathcal{E}_s$ vérifiant $v(X(s)) = a$, $v(Y(s)) = b$, avec $b < a < 0$, alors P_s appartient à la zéro section.*

La preuve de ce lemme résulte immédiatement des travaux de Néron [22].

3.3.1. *Le modèle de Néron pour $s = 0$.* A l'aide des transformations

$$\begin{array}{ll} x = X_0(s^2-10s+1)+Y_0 & X = X_0 - 2s^6 Z_0 \\ y = -Y_0 & Y = Y_0 + sX_0 + s^6 Z_0 \\ z = s^2(Z_0(10s^3-s^2)-X_0) & Z = Z_0, \end{array}$$

on obtient le modèle de Néron $\mathcal{E}_s$ au-dessus de $s = 0$

$$\begin{aligned} &Y^2Z + XYZ(s^2-12s+1) + YZ^2(2s^8-24s^7) = \\ &X^3 + X^2Z(s-10s^2-9s^3-s^4+6s^6) + XZ^2(2s^7-39s^8-36s^9-4s^{10}+12s^{12}) \\ &+Z^3(-s^{12}-38s^{14}-36s^{15}-4s^{16}+8s^{18}). \end{aligned}$$

On déduit alors du lemme précédent que toutes les composantes rationnelles de la fibre singulière I_{12} sont définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{1+4\times 0}) = \mathbb{Q}$.

3.3.2. *Le modèle de Néron pour $s = \infty$.* De même, le modèle de Néron $\mathcal{E}_\sigma$ au-dessus de l'infini est

$$\begin{aligned} Y^2Z + XYZ(9-30\sigma+3\sigma^2) + &YZ^2 180\sigma^2(\sigma-10) \\ &= X^3 - (27-180\sigma)X^2Z + XZ^2\sigma^2(810\sigma+2619) \\ &+ Z^3(24300\sigma^2 - 274860\sigma^3 + 48600\sigma^4). \end{aligned}$$

On déduit alors du lemme précédent que toutes les composantes rationnelles de la fibre singulière I_2 sont définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{81-4\times 27}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

3.3.3. *La fibre singulière au-dessus de α (ou β).* Elle est de type I_3. Grâce aux transformations précédentes, on voit que $\Theta_{\alpha,0}$ est la droite $x+y=0 \quad t=\alpha z$, $\Theta_{\alpha,1}$ est la droite $y+z=0 \quad t=\alpha x$, $\Theta_{\alpha,2}$ est la droite $x+z=0 \quad t=\alpha y$. Ces composantes sont définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$.

3.3.4. *La fibre singulière au-dessus de $s = 1/10$.* Elle est de type I_2.
On remarque que le changement de variable $\sigma \mapsto 10-\sigma$ laisse le modèle W_∞ inchangé. En outre, ce changement de variable laisse fixe la fibre singulière I_{12}, échange les deux fibres I_1, les deux fibres I_2 et les deux fibres I_3. Donc le modèle de Néron pour $s = \frac{1}{10}$ est le même que celui pour $s = \infty$. On en déduit que les composantes rationnelles de la fibre singulière I_2 au-dessus de $s = \frac{1}{10}$ sont définies sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

3.3.5. *La section infinie.* Les coordonnées de la section infinie (P_s) sont données par les formules dans le modèle $\mathcal{E}_s$ au-dessus de $s = 0$:

$X = -\frac{1}{432}(1 - 30s + 357s^2 - 2140s^3 + 6756s^4 - 10560s^5 + 6400s^6 + 864s^8)s$
$Y = -\frac{1}{15552}((130752 - 524800\sqrt{-3})s^9 + (1013760\sqrt{-3} - 1572480)s^8$
$+(-611640\sqrt{-3} + 2517768)s^7 + (58776\sqrt{-3} - 1687896)s^6$
$+(590274 + 80550\sqrt{-3})s^5 + (-116172 - 37872\sqrt{-3})s^4 + (7665\sqrt{-3} + 12924)s^3$
$+(-819\sqrt{-3} - 756)s^2 + (45\sqrt{-3} + 18)s - \sqrt{-3})$
$Z = s^3$

On en déduit

$$x + y = -\frac{1}{432}\frac{(s^2 - 10s + 1)(2s - 1)^2(5s - 1)^2(8s - 1)^2}{s^2}.$$

Par suite, d'après le lemme 1, la section infinie coupe la zéro section. En outre, d'après ce qui précède, elle ne coupe aucun des $\Theta_{0,i}$, $1 \leq i \leq 11$, aucun des $\Theta_{\alpha,i}$, $1 \leq i \leq 2$, aucun des $\Theta_{\beta,i}$, $1 \leq i \leq 2$, ni $\Theta_{\infty,1}$, ni $\Theta_{1/10,1}$.

3.3.6. *Les sections de torsion.* Dans le modèle W_0, on obtient avec Pari [23] les 6 points de torsion

$$\begin{aligned} s_6 &= (s^2(10s - 1) : 0 : 1) \\ 2s_6 &= (s^4 : 0 : 1) \\ 3s_6 &= (0 : 0 : 1) \\ 4s_6 &= (s^4 : -s^4(s^2 - 10s + 1) : 1) \\ 5s_6 &= (-s^2 + 10s^3 : -s^2(10s - 1)(s^2 - 10s + 1) : 1) \\ &(0). \end{aligned}$$

3.3.7. *Le discriminant de la variété.* Notons Θ le réseau trivial de $NS(Y_{10})$,

$$\Theta = \langle (0), f, \Theta_{v,i}, v \in \{0, \infty, 1/10, \alpha, \beta\}, 1 \leq i \leq m_v - 1\rangle.$$

D'après Shioda [31],

$$NS(Y_{10})/\Theta \simeq E(\mathbb{C}(s))$$

Par suite

$$|\det NS(Y_{10})| = \frac{|\det \Theta| \times |\det MW(E(\mathbb{C}_s))|}{|E(\mathbb{C}(s))_{tors}|^2}.$$

Puisque la section infinie (P_s) coupe la zéro section et ne coupe aucune des composantes des fibres singulières ne rencontrant pas la zéro section, les contributions aux fibres singulières sont nulles. D'après [30], on a

$$h(P_s) = 2\chi + 2(P_s).(0) = 2 \times 2 + 2 = 6.$$

Si P_s engendrait le groupe de Mordell-Weil, le discriminant de la variété vaudrait

$$|\det NS(Y_{10})| = \frac{12 \times 3^2 \times 2^2 \times 6}{6^2} = 72.$$

Nous allons montrer qu'il en est effectivement ainsi donc qu'il n'existe pas de point Q vérifiant $3Q = P_s + ks_6, \qquad 0 \leq k \leq 5$.
Puisque la section s_6 est de 6-torsion, elle ne coupe pas la zéro section, elle coupe $\Theta_{0,2}$ ou $\Theta_{0,10}$, coupe $\Theta_{\infty,1}$, $\Theta_{1/10,1}$, $\Theta_{\alpha,1}$ ou $\Theta_{\alpha,2}$, $\Theta_{\beta,1}$ ou $\Theta_{\beta,2}$. En effet, on doit avoir

$$h(s_6) = 4 - \frac{2 \times 10}{12} - 1 - \frac{4}{3} = 0.$$

Si le groupe de Mordell-Weil était engendré par Q tel que $3Q = P_s$, alors Q couperait $\Theta_{0,4}$ ou $\Theta_{0,8}$, $\Theta_{\infty,0}$, $\Theta_{1/10,0}$, $\Theta_{\alpha,0}$ ou $\Theta_{\alpha,1}$ ou $\Theta_{\alpha,2}$, $\Theta_{\beta,0}$ ou $\Theta_{\beta,1}$ ou $\Theta_{\beta,2}$. On aurait alors $h(Q) = 2$ ou $h(Q) = 10/3$, ce qui est impossible car dans ce cas le discriminant de la variété serait différent de 72 et de 8.
De même, si le groupe de Mordell-Weil était engendré par Q tel que $3Q = P_s + ks_6$, $\quad 1 \leq k \leq 5$, en regardant l'intersection avec la fibre singulière au-dessus de 0, on aurait $k = 3$. Ceci donnerait $\mathrm{cont}_0(Q) = \frac{2\times 10}{12}$, $\mathrm{cont}_\infty(Q) = \mathrm{cont}_{1/10}(Q) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{cont}_\alpha(Q) = \mathrm{cont}_\beta(Q) = \frac{2}{3}$, soit $h(Q) = 2$. Comme précédemment, ce cas est impossible.
Par suite

$$|\det NS(Y_{10})| = 72.$$

3.4. **La série L de Y_{10}.** Elle est donnée par les $A_p = \beta + \beta'$ tels que $Q_2(T) = (1-\beta T)(1-\beta' T)$. Le calcul des A_p repose sur le lemme suivant.

Lemme 2. *Soit X une surface $K3$ singulière et elliptique définie sur $\mathbb{Q}$. On suppose la section infinie engendrant le groupe de Mordell-Weil définie sur $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Alors*

$$A_p = -\sum_{x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p),\quad E_x \quad lisse} a_p(x) - \sum_{x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p),\quad E_x \quad singuli\grave{e}re} \epsilon_p(x) - \left(\frac{d}{p}\right) p$$

où $a_p(x)$ est donné par la formule

$$a_p(x) = p - 1 - \#E_x(\mathbb{F}_p)$$

et la contribution $\epsilon_p(x)$ est définie par

$$\epsilon_p(x) = \begin{cases} 0, & si\ E_x\ a\ r\acute{e}duction\ additive \\ 1, & si\ E_x\ a\ r\acute{e}duction\ multiplicative\ d\acute{e}ploy\acute{e}e \\ -1, & si\ E_x\ a\ r\acute{e}duction\ multiplicative\ non\ d\acute{e}ploy\acute{e}e \end{cases}.$$

Preuve
Suivant que les composantes des fibres singulières sont définies ou non sur $\mathbb{F}_p$, le polynôme $P_2(T)$ prend la forme

$$P_2(T) = (1-pT)^{k_1}(1+pT)^{k_2}(1-\left(\frac{d}{p}\right)pT)$$

avec $k_1 + k_2 = 19$ et $\left(\frac{d}{p}\right)$ désignant le symbole de Legendre. D'après 2.2, on a donc la formule

$$N_p = 1 + p^2 + p(k_1 + (-1)k_2) + \left(\frac{d}{p}\right)p + A_p. \tag{5}$$

En évaluant alors N_p à l'aide de la fibration Φ, on obtient:

$$\begin{aligned}
N_p = & \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ lisse}}} \#E_x(\mathbb{F}_p) + \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ singulière}}} \#E_x(\mathbb{F}_p) \\
& + \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ singulière}}} \#E_x(\mathbb{F}_p) \sum_{j \neq 0} \#\Theta_{j,x} \\
= & \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ lisse}}} (p + 1 - a_p(x)) \\
& + \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ singulière}}} (p + 1 - \epsilon_p(x)) + p(k_1 - 2 + (-1)k_2).
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$N_p = 1 + p^2 - \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ lisse}}} a_p(x) - \sum_{\substack{x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \\ E_x \text{ singulière}}} \epsilon_p(x) + p(k_1 + (-)k_2)$$

En comparant ces deux expressions de N_p, on obtient le résultat annoncé.

Remarque 3. *En fait, selon que* $\left(\frac{\lambda^2+4\alpha}{p}\right) = \pm 1$ *la réduction est déployée ou non.*

3.5. **Modularité de la fonction L.** La surface $K3$, Y_{10}, définie sur $\mathbb{Q}$, admet un système $\rho = (\rho_l)$ de représentations l-adiques de dimension 2 de $G_{\mathbb{Q}}$,

$$\rho_l : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut} H^2_{\mathrm{trc}}(Y_{10}, \mathbb{Q}_l) = V_{10}$$

où V_{10} est un $\mathbb{Q}_l$-espace vectoriel.
Le système $\rho = (\rho_l)$ a une fonction L

$$L(s, \rho) = \prod_{p \neq 2,3,5} \frac{1}{1 - A_p p^{-s} + \pm p^2 p^{-2s}}.$$

On veut identifier cette fonction L avec la fonction L associée à une forme de Hecke à coefficients rationnels et multiplication complexe. Pour cela nous allons utiliser le critère de Serre-Livné.

Lemme 3. *Soit $\rho_l, \rho'_l : G_{\mathbb{Q}} \to AutV_l$ deux représentations l-adiques avec $TrF_{p,\rho_l} = TrF_{p,\rho'_l}$ pour un ensemble de nombres premiers p de densité 1 (i.e. pour tous les nombres premiers sauf un nombre fini). Si ρ_l et ρ'_l définissent deux systèmes strictement compatibles, les fonctions L associées à ces deux systèmes sont les mêmes.*

La grande idée de Serre reprise par Livné [15] est de remplacer cet ensemble de nombres premiers de densité 1 par un ensemble fini.

Définition 1. *Un ensemble fini T de nombres premiers est appelé ensemble de test effectif pour une représentation de Galois $\rho_l : G_{\mathbb{Q}} \to AutV_l$ si l'on peut appliquer le lemme précédent en remplaçant l'ensemble de densité 1 par T.*

Définition 2. *Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, S un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$ à r éléments, $S' = S \cup \{-1\}$. Définissons pour chaque $t \in \mathcal{P}$, $t \neq 2$ et chaque $s \in S'$ la fonction*

$$f_s(t) := \frac{1}{2}(1 - \left(\frac{s}{t}\right))$$

et si $T \subset \mathcal{P}$, $T \cap S = \emptyset$,

$$f : T \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r+1}$$

tel que

$$f(t) = (f_s(t))_{s \in S'} .$$

Théorème 7. *(Critère de Livné)*
Soit ρ et ρ' deux $G_{\mathbb{Q}}$-représentations 2-adiques non ramifiées hors d'un ensemble fini S de nombres premiers, satisfaisant

$$TrF_{p,\rho} \equiv TrF_{p,\rho'} \equiv 0 \qquad (mod \quad 2)$$

et

$$detF_{p,\rho} \equiv detF_{p,\rho'} \qquad (mod \quad 2)$$

pour tout $p \notin S \cup \{2\}$.
Tout ensemble fini T de nombres premiers disjoint de S tel que $f(T) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r+1} \setminus \{0\}$ est un ensemble de test effectif pour ρ par rapport à ρ'.

Pour appliquer le critère de Livné nous devons montrer que la représentation de Galois ρ associée à Y_{10} vérifie $\mathrm{Tr}F_{p,\rho} \equiv 0 \quad (2)$, c'est-à dire que A_p est
pair, ce qui est équivalent d'après (5) à N_p pair puisque $1 + p^2 \equiv 0 \quad (2)$ et $k_1 + k_2 + 1 = 20$.
Définissons

$$Y := \{(x : y : z : t) \in \mathbb{P}^3 / xyz(x + y + z) + t^2(xy + xz + yz) - 10xyzt = 0\}.$$

La surface Y_{10} est obtenue à partir de Y par éclatement des 7 points doubles

$$P_{01} \quad P_{02} \quad P_{03} \quad P_{04} \quad P_{12} \quad P_{13} \quad P_{23}.$$

Notons $\mathbb{P}(Y')$ la variété projective correspondant à

$$Y' := \{(x : y : z : 1) \in \mathbb{P}^3 / (x : y : z : 1) \in Y, xyz \neq 0\}$$

et $N_p(Y')$ le nombre de ses points.
Or si $(x : y : z : 1) \in Y'$ avec au moins une coordonnée x, y ou z différente de ± 1, par exemple z, le point $(x : y : 1/z : 1) \in Y'$. En outre le cas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ et $z = \pm 1$ est impossible. Par suite $N_p(Y')$ est pair. Il suffit donc de compter les points de Y_{10} provenant de Y avec au moins une coordonnée nulle. On a ainsi

- $p - 2$ points avec une seule coordonnée nulle (ces points sont de la forme $(x : y : z : 0)$ et vérifient $x + y + z = 0$),
- $6(p - 1)$ points avec exactement deux coordonnées nulles sur les droites doubles $t = 0 \quad x = 0$, $t = 0 \quad y = 0$, $t = 0 \quad z = 0$,
- $3(p - 1)$ points avec exactement 2 coordonnées nulles sur les droites $x = 0 \quad y = 0$, $x = 0 \quad z = 0$, $y = 0 \quad z = 0$,
- 4 points avec trois coordonnées nulles P_{01}, P_{02}, P_{03} P_{04},
- les 3 points d'intersection des droites doubles P_{01}, P_{02}, P_{03},

- $10p$ points provenant de l'éclatement de tous les points doubles, les points P_{01}, P_{02}, P_{03} étant à éclater deux fois.

Au total on a 20p-4 points soit un nombre pair de points. Finalement, on a bien

$$A_p \equiv N_p \equiv 0 \quad (2).$$

La représentation de Galois ρ associée à Y_{10} est ramifiée au plus pour 2 et 3 puisque $Y_{10}(p)$ est singulière seulement pour ces nombres premiers. Par suite $r = 2$. En outre, on peut prendre

$$T = \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}.$$

Pour calculer A_p, $p \in T$, avec la formule du lemme 2, nous devons connaître ϵ_x pour $x = 0, 1, \infty$. Nous avons vu que $\epsilon_0 = 1$ et $\epsilon_\infty = \left(\frac{-3}{p}\right)$. Pour obtenir ϵ_1, nous utilisons un modèle minimal au voisinage de 1

$$\begin{aligned} &Y^2 + XY(8 + 8S - S^2) + Y(-24S + 3S^2) = \\ &X^3 - X^2(19 - 8S - S^2) - X(40S - 5S^2) + 192S - 24S^2. \end{aligned}$$

Comme $\lambda_0^2 + 4\alpha_0 = -12$, on en déduit $\epsilon_1 = \left(\frac{-3}{p}\right)$.
On calcule alors les A_p, $p \in T$ avec les ordres Pari [23]
$e(s) = ellinit([s^2 - 10 * s + 1, s^2 * (1 - 10 * s - s^2), 0, 10 * s^7 - s^6, 0])$
$A_p = -sum(s = 2, p-1, ellak(e(s), p) - 1 - 2 * kronecker(-3, p) - kronecker(-3, p) * p$
On trouve alors le tableau suivant

p	5	7	11	13	17	19	23
A_p	0	0	14	0	2	-34	0

Or la série $L(f, s)$ pour f newform à multiplication complexe de poids 3 à coefficients de Fourier rationnels de niveau 8 [28] est également de trace paire et a les mêmes coefficients a_p pour $p \in T$. Par suite la série L de la surface Y_{10} vérifie

$$L(Y_{10}, 3) = L(f, 3).$$

En outre,

$$\frac{1}{2} \sum_{k,m}{}' \frac{k^2 - 2m^2}{(k^2 + 2m^2)^3}$$

est la série L de la forme modulaire $F := [\theta_1, \theta_2]$, pour $\theta_a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{an^2}$ forme modulaire de poids 1/2 pour le groupe de congruence $\Gamma_0(4)$. Le crochet de Rankin-Cohen des formes modulaires g et h de poids respectifs k et l pour un groupe de congruence Γ, est une forme modulaire de poids $k + l + 2$ pour Γ définie par

$$[g, h] := kgh' - lg'h.$$

Donc $F = [\theta_1, \theta_2]$ est une forme modulaire de poids 3 pour $\Gamma_0(4)$ de trace paire. Pour montrer l'égalité de $L(f, s) = L(F, s)$ il suffit de montrer qu'elles coincident sur T. Ceci achève la preuve du 1).

Remarque 4. *Comme me l'a suggéré M. Schütt, dans notre cas on peut se passer de la méthode de Livné. Pour cela on renvoie au théorème 5 de Schütt ainsi qu'à sa preuve* [28]. *La série L de Y_{10} ne peut différer de la forme modulaire f que par un caractère de Dirichlet quadratique. Puisqu'il n'y a pas de ramification pour $p \neq 2, 3$, le caractère quadratique ne peut être que $\chi_{\pm 1}$, $\chi_{\pm 2}$, $\chi_{\pm 3}$ ou $\chi_{\pm 6}$, ce qui fait 8 possibilités. Les valeurs $\chi_{\pm 2}(5) = -1$, $\chi_{\pm 3}(5) = -1$, $\chi_{-1}(7) = -1$, $\chi_6(7) = -1$ et $\chi_{-6}(13) = -1$ excluent les caractères quadratiques non triviaux et montrent qu'il suffit de comparer A_p et a_p pour $p \leq 13$ pour déduire que*

$$L(Y_{10}, 3) = L(f, 3).$$

3.6. **Preuve du théorème 1 2).** Notons comme dans [3]

$$D_{j\tau} = (mj\tau + \kappa)(mj\bar{\tau} + \kappa).$$

Alors

$$\begin{aligned} m(P_k) = \frac{\Im\tau}{8\pi^3} \sum_{m,\kappa}{}' [-4 \frac{(m(\tau+\bar{\tau}) + 2\kappa)^2}{D_\tau^3} &+ \frac{4}{D_\tau^2} \\ + 16 \frac{(2m(\tau+\bar{\tau}) + 2\kappa)^2}{D_{2\tau}^3} &- \frac{16}{D_{2\tau}^2} \\ - 36 \frac{(3m(\tau+\bar{\tau}) + 2\kappa)^2}{D_{3\tau}^3} &+ \frac{36}{D_{3\tau}^2} \\ + 144 \frac{(6m(\tau+\bar{\tau}) + 2\kappa)^2}{D_{6\tau}^3} &- \frac{144}{D_{6\tau}^2}] \end{aligned}$$

Pour $k = 10$, on a $\tau = \frac{-i}{\sqrt{2}}$ et

$$\begin{aligned} D_\tau &= \frac{1}{2}(m^2 + 2\kappa^2) \\ D_{2\tau} &= 2m^2 + \kappa^2 \\ D_{3\tau} &= \frac{1}{2}(9m^2 + 2\kappa^2) \\ D_{6\tau} &= 18m^2 + \kappa^2. \end{aligned}$$

$$m(P_{10}) = \frac{\sqrt{2}}{16\pi^3} [16 \times 4 \sum_{m,\kappa}{}' \frac{m^2 - 2\kappa^2}{(m^2 + 2\kappa^2)^3}$$

$$-36 \times 8 \frac{4k^2}{(9m^2 + 2k^2)^3} + 36 \times 4 \frac{1}{(9m^2 + 2k^2)^2}$$

$$-36 \times 4 \frac{4k^2}{(18m^2 + k^2)^3} + 36 \times 4 \frac{1}{(18m^2 + k^2)^2}].$$

D'où l'expression

$$m(P_{10}) = \frac{\sqrt{2}}{16\pi^3} [16 \times 4 \sum_{m,\kappa}{}' \frac{m^2 - 2\kappa^2}{(m^2 + 2\kappa^2)^3}$$

$$+36 \times 8 \frac{9m^2 - 2\kappa^2}{(9m^2 + 2\kappa^2)^3} - 36 \times 4 \frac{1}{(9m^2 + 2\kappa^2)^2}$$

$$+36\times 8\frac{\kappa^2-18m^2}{(\kappa^2+18m^2)^3}+36\times 4\frac{1}{(18m^2+\kappa^2)^2}].$$

Lemme 4. *(Zagier [38]) On peut montrer les formules suivantes:*

(1)

$$A(s):=\sum{}'(-\frac{1}{(9m^2+2k^2)^s}+\frac{1}{(k^2+18m^2)^s})=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{r_n}{n^s}$$

où

$$r_n:=\frac{1}{2}\#\{(k,m)/k^2+2m^2=n\};$$

plus précisément

$$A(2)=\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}L(\chi_{-3},2).$$

(2)

$$\sum{}'\frac{k^2-18m^2}{(k^2+18m^2)^s}+\sum{}'\frac{9m^2-2k^2}{(9m^2+2k^2)^s}=(1+\frac{2}{3^s}+\frac{27}{3^{2s}})\sum{}'\frac{m^2-2k^2}{(m^2+2k^2)^s}.$$

Preuve

1) Soit $n=k^2+2m^2$.

- Si $3\nmid k$ et $3\mid m$, alors $k^2+2m^2=k^2+18m'^2\equiv 1 \mod 3$.
- Si $3\mid k$ et $3\nmid m$, alors $k^2+2m^2=9k'^2+2m^2\equiv -1 \mod 3$.
- Dans les deux autres cas, $3\mid n$.

Ainsi

$$A(s)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-3}{n}\right)\frac{r_n}{n^s}=2L(\chi_{-3},s)L(\chi_{24},s)$$

puisque

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_n}{n^s}=\zeta(s)L(\chi_{-8},s).$$

Si $s=2$, puisque $2L(\chi_{24},2)=\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}$, on déduit

$$A(2)=\frac{\pi^2}{2\sqrt{6}}L(\chi_{-3},2).$$

2) Notons

$$B(s):=\sum{}'\frac{k^2-18m^2}{(k^2+18m^2)^s}+\sum{}'\frac{9m^2-2k^2}{(9m^2+2k^2)^s}$$

et définissons

$$S:=\frac{1}{2}\sum_{k,m}{}'\frac{k^2-2m^2}{(k^2+2m^2)^s}.$$

Maintenant

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}=L(f,s)$$

avec f forme parabolique de poids 3 et niveau 8. En outre, la fonction $L(f,s)$, a un développement en produit d'Euler

$$L(s,f) = \frac{1}{1 - a_3 3^{-s} + 3^{3-1-2s}} \prod_{p \neq 3} L_p(f,s).$$

Puisque $a_3 = -2$, il s'ensuit

$$L(s,f) = \frac{1}{1 + \frac{2}{3^s} + \frac{9}{3^{2s}}} \prod_{p \neq 3} L_p(f,s).$$

Mais

$$B(s) = \sum_{3|k, 3\nmid m}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s} + \sum_{3|m, 3\nmid k}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s} + 2 \sum_{3|k, 3|m}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s},$$

$$\sum_{3|k, 3\nmid m}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s} + \sum_{3\nmid k, 3|m}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s} = 2(1 + \frac{2}{3^s} + \frac{9}{3^{2s}})S$$

et

$$\sum_{3|k, 3|m}{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s} = 9^{1-s} \sum{}' \frac{m^2 - 2k^2}{(m^2+2k^2)^s}.$$

Aussi,

$$\begin{aligned} B(s) &= 2S(1 + \frac{2}{3^s} + \frac{9}{3^{2s}}) + 4 \times 9^{1-s} S \\ &= 2S(1 + \frac{2}{3^s} + \frac{27}{9^s}). \end{aligned}$$

On déduit du lemme précédent

$$m(P_{10}) = 2d_3 + \frac{3 \times 8\sqrt{2}}{\pi^3} \sum{}' \frac{m^2 - 2\kappa^2}{(m^2 + 2\kappa^2)^3}.$$

Finalement

$$m(P_{10}) = 2d_3 + \frac{1}{9} \frac{|\det T_{Y_{10}}|^{3/2}}{\pi^3} L(Y_{10}, 3),$$

ce qui achève la preuve du théorème 1 2).

Remarque 5. *On a également prouvé la relation conjecturée par Boyd* [12]

$$m(P_{10}) = 2d_3 + 3m(P_2).$$

Remerciements
Je remercie chaleureusement J. Lewis et N. Yui pour leur invitation au CMS Winter meeting à Toronto (Décembre 2006). Cette Conférence, qui m'a donné l'occasion de rencontrer des experts du domaine, a été le point de départ de ce travail. Je suis particulièrement reconnaissante à M. Schütt pour ses conseils et pour toutes nos discussions. Merci également à D. Boyd, O. Lecacheux et D. Zagier pour leur aide variée et très appréciée.

References

[1] A. Beauville, *Les familles stables de courbes elliptiques sur* $\mathbb{P}^1$ *admettant quatre fibres singulières* C.R.Acad.Sci. Paris Sér. I Math. t.294 (1982), 657-660.

[2] M.J. Bertin, *Mesure de Mahler d'une famille de polynômes*, J. reine angew. Math. 569 (2004), 175-188.

[3] M.J. Bertin, *Mesure de Mahler d'hypersurfaces* $K3$, J. of Number Theory, 128 (2008), n 11, 2890-2913.

[4] M.J. Bertin, *Mahler's measure and L-series of K3 hypersurfaces*, in *Mirror Symmetry V*, (Eds. N. Yui, S.-T. Yau, J. D. Lewis), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 38 (2007).

[5] M.J. Bertin, *Mahler's measure: from number theory to geometry*, in *Number Theory and polynomials*, 20-32, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 352, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (2008).

[6] M.J. Bertin, *The Mahler measure and the L-series of a singular K3-surface*, arXiv:0803.0413v1 [math. NT] 4 Mar 2008.

[7] S. Bloch & D. Grayson, K_2 *and L-functions of elliptic curves computer calculations*, Contemp. Math. **5**5, Part I, (1986), 79-88.

[8] D.W. Boyd, *Kronecker's Theorem and Lehmer's Problem for Polynomials in several Variables*, J. Number Theory **1**3 (1981), 116-121.

[9] D.W. Boyd, *Speculations concerning the Range of Mahler's Measure*, Canad. Math. Bull. **2**4 (1981), 453-469.

[10] D.W. Boyd, *Mahler's measure and special values of L-functions*, Experiment. Math. **7** (1998), 37-82.

[11] D.W. Boyd, *Explicit formulas for Mahler measure*, Bulletin CRM, Autumn 2005, 14-15 (CRM-Fields Prize lecture).

[12] D.W.Boyd, *Personal communication.*

[13] F. Brunault, *Etude de la valeur en* $s = 2$ *de la fonction L d'une courbe elliptique*, Thèse de Doctorat, Université Paris 7, (2005).

[14] C. Deninger, *Deligne periods of mixed motives, K-theory and the entropy of certain* $\mathbb{Z}^n$*-actions*, J. Amer. Math. Soc.**1**0:2 (1997), 259-281.

[15] K. Hulek, R. Kloosterman & M. Schütt, *Modularity of Calabi-Yau varieties*, preprint (2006), in Global Aspects of Complex Geometry, Springer Verlag 2006 (F. Catanese, H. Esnault, A. Huckleberry, K. Hulek and T. Peternell, eds.), 271-309.

[16] O. Lecacheux, Personal communication.

[17] D. H. Lehmer, *Factorization of certain cyclotomic functions*, Ann. of Math. (2) **3**4 (1933), 461-479.

[18] M. Lalin & M. Rogers, *Functional equations for Mahler measures of genus-one curves*, Algebra Number Theory 1 (2007), n1, 87-117.

[19] V. Maillot, Géométrie d'Arakelov des grassmanniennes, des variétés toriques et de certaines hypersurfaces, Thèse Université Paris 7 (1997).

[20] V. Maillot, Unpublished lecture at the BIRS workshop, *The Many Aspects of Mahler's Measure*, April 26-May 1, 2003.

[21] A. Mellit, *Elliptic dilogarithms and parallel lines*, Mathematische Arbeitstagung 2009, Preprint of the Max-Planck-Institut für Mathematik (Juin 2009).

[22] A. Néron, *Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci., 21, 128 (1964).

[23] PARI/GP, *http://pari.math.u-bordeaux.fr/ belabas/pari/*

[24] C. Peters & J. Stienstra, *A pencil of* $K3$ *surfaces related to Apery's recurrence for* $\zeta(3)$ *and Fermi surfaces for potential zero*, Arithmetic of Complex Manifolds (Erlangen, 1988) (W.-P. Barth and H. Lange, eds.), Lecture Notes in Math., vol. 1399, Springer, Berlin 1989, 110-127.

[25] C. Peters, J. Top & M. van der Vlugt, *The Hasse zeta function of a* $K3$ *surface related to the number of words of weight* 5 *in the Mela's codes*, J. reine angew. Math. 432 (1992), 151-176.

[26] F. Rodriguez-Villegas, *Modular Mahler Measures*, http://www.ma.utexas.edu/users/villegas/research.html, Preprint (1996).

[27] F. Rodriguez-Villegas, *Modular Mahler measures I*, Topics in Number Theory (S.D. Ahlgren, G.E. Andrews & K. Ono, ed.), Kluwer, Dordrecht (1999), 17-48.

[28] M. Schütt, *CM newforms with rational coefficients*, Ramanujan J. 19 (2009), n2, 187-205.

[29] M. Schütt, *Personal communication.*
[30] M. Schütt & T. Shioda, *Elliptic surfaces*, arXiv:0907.0298v1 [math.AG] 2 Jul 2009.
[31] T. Shioda, *On the Mordell-Weil Lattices*, Comm. Math. Univ. St. Pauli, **3**9 (1990), 211-240.
[32] T. Shioda, *On elliptic modular surfaces*, J. Math. Soc. Japan, vol. 24, n1, (1972), 20-59.
[33] T. Shioda & H. Inose, *On singular $K3$ surfaces* in Complex analysis and algebraic geometry (Baily, Shioda T. ed.) , Cambridge (1977), 119-135.
[34] J. Stienstra & F. Beukers, *On the Picard-Fuchs Equation and the Formal Brauer Group of Certain Elliptic $K3$-Surfaces*, Math. Ann. 271, (1985), 269-304.
[35] Ch. J. Smyth, *On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer*, Bull. London Math. Soc. **3** (1971), 169-175.
[36] H. Verrill, *Root Lattices and Pencils of Varieties*, Ph. D. Cambridge University, (July 1994).
[37] N. Yui, *Arithmetic of Calabi-Yau varieties*, Matematisches Institut Seminars (Y. Tschinkel, ed.), Universität Göttingen, (2004), 9-29.
[38] D. Zagier, Personal communication.

E-mail address: `bertin@math.jussieu.fr`
Current address: Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Institut de Mathématiques, 175 rue du Chevaleret, 75013 PARIS, France