Mesure de Mahler de variétés algébriques

Marie José BERTIN

Institut Mathématique de Jussieu
Université Paris 6
4 Place Jussieu, 75005 PARIS

bertin@math.jussieu.fr

10 Septembre 2011

Introduction

Introduite par Mahler en 1962,
la mesure de Mahler logarithmique d'un polynôme P est

$$m(P) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \log \mid P(x_1, \cdots, x_n) \mid \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}$$

et sa mesure de Mahler

$$M(P) = \exp(m(P))$$

où

$$\mathbb{T}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n / |x_1| = \cdots = |x_n| = 1\}.$$

Remarques

- $n = 1$

  Par la formule de Jensen, si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire, alors

$$M(P) = \prod_{P(\alpha)=0} \max(|\ \alpha\ |, 1).$$

  Cette quantité intervient dans la question de Lehmer (1933)
  Existe-t-il $P \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire, non cyclotomique, satisfaisant

$$1 < M(P) < M(P_0) = 1.1762\cdots ?$$

  Le polynôme

$$P_0(X) = X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$$

  est le polynôme de Lehmer, en fait un polynôme de Salem.

Le problème de Lehmer est toujours non résolu.
Une réponse partielle a été donnée par Smyth (1971)

$$M(P) \geq 1.32\cdots$$

si P est non réciproque.

On peut illustrer l'histoire de la mesure de Mahler avec les polynômes suivants

$$x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

- $m(x_0 + x_1) = 0$ (par la formule de Jensen)
- $$m(x_0 + x_1 + x_2) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2) = L'(\chi_{-3}, -1) \quad \text{Smyth (1980)}$$
- $$m(x_0 + x_1 + x_2 + x_3) = \frac{7}{2\pi^2}\zeta(3) \quad \text{Smyth (1980)}$$

  (premières mesures de Mahler explicites).

- $$m(x_0+x_1+x_2+x_3+x_4) \stackrel{?}{=} **L(f,3) \quad \text{conjecturé par Villegas (2004)}$$

  f forme modulaire de poids 3 et conducteur 15
  $L(f,3)$ est aussi la série L de la surface K3 définie par

  $$x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=0$$
  $$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=0$$

Pourquoi une telle conjecture?

Grâce aux intuitions de deux personnes.

- Deninger (1996) qui conjectura

$$m(x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + 1) \stackrel{?}{=} \frac{15}{4\pi^2} L(E, 2) = L'(E, 0)$$

  E courbe elliptique de conducteur 15 définie par le polynôme.
  prouvée en 2011 par Rogers et Zudilin
  Remarquez que ce polynôme est réciproque.

- Maillot (2003) utilisant un résultat de Darboux (1875): la mesure de Mahler de P qui est l'intégration d'une forme différentielle sur une variété, quand P est non réciproque, est en fait une intégration sur une variété plus petite et l'expression de la mesure de Mahler est donnée par la cohomologie de la petite variété.

- $n = 2$ La petite variété est définie par

$$\left.\begin{array}{r} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = 0$$

  C'est une courbe de genre 0. Aussi $m(x_0 + x_1 + x_2)$ s'exprime à l'aide d'une série de Dirichlet.

- $n = 3$ La petite variété est définie par

$$\left.\begin{array}{r} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \dfrac{1}{x_0} + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) = 0$$

  C'est l'intersection de 3 plans. D'où le résultat de Smyth.

- $n = 4$ (Conjecture de Villegas (2004)) La petite variété est définie par

$$\begin{aligned} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} &= 0 \end{aligned}$$

  C'est la surface $K3$ modulaire étudiée par Peters, Top, van der Vlugt (1992) définie par un polynôme réciproque. Sa série L est $L(f, s)$.

- $n = 5$ (Autre conjecture de Villegas (2005))

$$m(x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = ** L(g, 4)$$

  g forme modulaire de poids 4 et conducteur 6 donnant la série L de la quintique de Barth-Nieto.

La quintique de Barth-Nieto

C'est le 3-fold compactification de la courbe intersection complète de

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$$
$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{1}{x_5} = 0$$

Elle a été étudiée par Hulek, Spandaw, Van Geemen, Van Straten en 2001.
Ils ont prouvé que la fonction L de cette quintique (celle de leur troisième groupe de cohomologie étale) est modulaire, ce qui avait été prédit par une conjecture de Fontaine et Mazur.
La forme modulaire est la newform de poids 4 pour $\Gamma_0(6)$

$$f = (\eta(q)\eta(q^2)\eta(q^3)\eta(q^6))^2$$

Motivation

On voit sur ces exemples que la détermination de la mesure de Mahler de certains polynômes non réciproques nécessite la connaisance de la mesure de Mahler de polynômes réciproques.
En particulier, il est très important d'avoir beaucoup d'exemples de mesures de Mahler d'hypersurfaces $K3$.
Bien noter que l'idée de Maillot ne permet que de prédire le type de formule espéré.
De même, la conjecture de Deninger résultait des conjectures de Beilinson.

Quelques notions de base sur les surfaces K3

Nos résultats concernent la famille de polynômes

$$P_k = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} - k$$

définissant des surfaces K3, Y_k. Qu'appelle-t-on une surface K3?
C'est une surface lisse X satisfaisant

- $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ i.e. X simplement connexe
- $K_X = 0$ i.e. le fibré canonique est trivial i.e. il existe une unique 2-forme holomorphe ω à scalaire près sur X.

Exemple et principales propriétés

- Un revêtement double ramifié le long d'une sextique plane définit par exemple une surface $K3$ notée X.
  Pour la famille précédente
$$(2z + x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k)^2 = (x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} - k)^2 - 4$$
- $H_2(X, \mathbb{Z})$ est un groupe libre de rang 22.
- Avec l'accouplement d'intersection, $H_2(X, \mathbb{Z})$ est un réseau et
$$H_2(X, \mathbb{Z}) \simeq U_2^3 \perp (-E_8)^2 := \mathcal{L}$$
  $\mathcal{L}$ est le réseau $K3$, U_2 le réseau hyperbolique de rang 2, E_8 le réseau unimodulaire de rang 8.

Principales propriétés (suite)

- $$Pic(X) \subset H_2(X, \mathbb{Z}) \simeq Hom(H^2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$$

  où $Pic(X)$ est le groupe des diviseurs modulo l'équivalence linéaire, paramétrisé par les cycles algébriques (car si X est une surface $K3$ les équivalences linéaire et algébrique sont les mêmes).

- $$Pic(X) \simeq \mathbb{Z}^{\rho(X)}$$

  $$\rho(X) := \text{Picard number of } X$$

  $$1 \leq \rho(X) \leq 20$$

- $$T(X) := (Pic(X))^{\perp},$$

  l'orthogonal étant pris dans $H^2(X, \mathbb{Z})$, est appelé réseau transcendant de dimension $22 - \rho(X)$

- Si $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{22}\}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $H_2(X, \mathbb{Z})$ et ω la 2-forme holomorphe,

  $$\int_{\gamma_i} \omega$$

  est appelée période de X et

  $$\int_{\gamma} \omega = 0 \text{ for } \gamma \in Pic(X).$$

- Si $\{X_z\}$ est une famille de surfaces $K3$, pour $z \in \mathbb{P}^1$, avec nombre de Picard générique ρ et ω_z la 2-forme holomorphe correspondante, alors les périodes de X_z satisfont une équation différentielle de Picard-Fuchs d'ordre $k = 22 - \rho$. Pour notre famille, $k = 3$.

- En fait, d'après Morrison, une surface $K3$ $\mathcal{M}$-polarisée, de nombre de Picard 19 a une structure de Shioda-Inose, c'est-à-dire

$$\begin{array}{ccc} X & & A = E \times E/C_N \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Y = Kum(A/\pm 1) & \end{array}$$

- Si le nombre de Picard $\rho = 20$, alors la courbe elliptique est CM, i.e. à multiplication complexe.

Mesure de Mahler de P_k

Théorème

(B. 2005) Soit $k = t + \frac{1}{t}$ avec

$$t = (\frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)})^6, \;\; \eta(\tau) = e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \prod_{n\geq 1}(1 - e^{2\pi i n\tau}), \;\; q = \exp 2\pi i\tau$$

$$\begin{aligned} m(P_k) = & \frac{\Im\tau}{8\pi^3}\{\sum_{m,\kappa}{}' (-4(2\Re\frac{1}{(m\tau+\kappa)^3(m\bar{\tau}+\kappa)} + \frac{1}{(m\tau+\kappa)^2(m\bar{\tau}+\kappa)^2}) \\ & + 16(2\Re\frac{1}{(2m\tau+\kappa)^3(2m\bar{\tau}+\kappa)} + \frac{1}{(2m\tau+\kappa)^2(2m\bar{\tau}+\kappa)^2}) \\ & - 36(2\Re\frac{1}{(3m\tau+\kappa)^3(3m\bar{\tau}+\kappa)} + \frac{1}{(3m\tau+\kappa)^2(3m\bar{\tau}+\kappa)^2}) \\ & + 144(2\Re\frac{1}{(6m\tau+\kappa)^3(6m\bar{\tau}+\kappa)} + \frac{1}{(6m\tau+\kappa)^2(6m\bar{\tau}+\kappa)^2}))\} \end{aligned}$$

Idée de la preuve

Soit

$$P_k = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} + z + \frac{1}{z} - k$$

définissant la famille de surfaces $K3$, (X_k).

- Pour $k \in \mathbb{P}^1$, génériquement $\rho = 19$.
- La famille est $\mathcal{M}_k$-polarisée avec

$$\mathcal{M}_k \simeq U_2 \perp (-E_8)^2 \perp \langle -12 \rangle$$

- Son réseau transcendant est le réseau

$$T_k \simeq U_2 \perp \langle 12 \rangle$$

- L'équation différentielle de Picard-Fuchs est la suivante

$$(k^2-4)(k^2-36)y''' + 6k(k^2-20)y'' + (7k^2-48)y' + ky = 0$$

- La famille est modulaire dans le sens suivant
  si $k = t + \frac{1}{t}$, $\tau \in \mathcal{H}$ et τ comme dans le théorème

$$t(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}) = t(\tau) \ \forall \ (\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}) \in \Gamma_1(6,2)^* \subset \Gamma_0(12)^* + 12$$

où

$$\Gamma_1(6) = \{(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}) \in Sl_2(\mathbb{Z}) \ / \ a \equiv d \equiv 1 \ (6) \ \ c \equiv 0 \ (6)\}$$

$$\Gamma_1(6,2) = \{(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}) \in \Gamma_1(6) \ \ c \equiv 6b \ \ (12)\}$$

et

$$\Gamma_1(6,2)^* = \langle \Gamma_1(6,2), w_6 \rangle$$

.

- L'équation de P-F a une base de solutions $G(\tau)$, $\tau G(\tau)$, $\tau^2 G(\tau)$ avec

$$G(\tau) = \eta(\tau)\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(6\tau)$$

satisfaisant

$$G(\tau) = F(t(\tau)), \quad F(t) = \sum_{n\geq 0} v_n t^{2n+1}, \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

- $\frac{dm(P_k)}{dk}$ est une période, donc satisfait l'équation de Picard-Fuchs
- $$\frac{dm(P_k)}{dk} = G(\tau)$$
- $$dm(P_k) = -G(\tau)\frac{dt}{t}\frac{1-t^2}{t}$$

  est une forme modulaire de poids 4 pour $\Gamma_1(6,2)^*$
- et s'exprime donc comme combinaison des séries $E_4(n\tau)$ pour $n = 1, 2, 3, 6$

- Par intégration on obtient

$$m(P_k) = \Re(-\pi i\tau + \sum_{n\geq 1}(\sum_{d|n} d^3)(4\frac{q^n}{n} - 8\frac{q^{2n}}{n} + 12\frac{q^{3n}}{n} - 24\frac{6n}{n}))$$

- A l'aide d'un développement de Fourier, on déduit l'expression de la mesure de Mahler en termes de séries d'Eisenstein-Kronecker.

Pour certaines valeurs de k, le τ correspondant est quadratique imaginaire. Par exemple,

k	0	2	3	6	10	18
τ	$\frac{-3+\sqrt{-3}}{6}$	$\frac{-2+\sqrt{-2}}{6}$	$\frac{-3+\sqrt{-15}}{12}$	$\frac{\sqrt{-6}}{6}$	$\frac{\sqrt{-2}}{2}$	$\sqrt{\frac{-5}{6}}$

Pour ces τ quadratiques appelés "singuliers", la surface $K3$ est singulière, i.e. son nombre de Picard est $\rho = 20$ et la courbe elliptique E donnée par la construction de Shioda-Inose est CM

Il en résulte une expression de la mesure de Mahler en termes de séries L de Hecke (aspect arithmétique) et peut-être en termes de séries L de l'hypersurface $K3$ (aspect géométrique).

Théorème

Soit Y_k l'hypersurface $K3$ associée au polynôme P_k, $L(Y_k, s)$ sa série L et T_Y son réseau transcendant. Alors,

$$m(P_0) = d_3 := \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} L(\chi_{-3}, 2)$$

$$m(P_2) = \frac{|\det T(Y_2)|^{3/2}}{\pi^3} L(Y_2, 3) = \frac{8\sqrt{8}}{\pi^3} L(f_8, 3)$$

$$m(P_{10}) = \frac{|\det T(Y_{10})|^{3/2}}{9\pi^3} L(Y_{10}, 3) + 2d_3 = \frac{72\sqrt{72}}{9\pi^3} L(f_8, 3) + 2d_3$$

On désigne par f_N l'unique, à twist près, CM-newform, CM par $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$, de poids 3 et niveau N à coefficients rationnels.

Quelques ingrédients dans la preuve

$$L^*(X,s) := \prod_{p\nmid N}^{*} Z(X|\mathbb{F}_p, p^{-s}) = \sum_{n\geq 1} \frac{a(n)}{n^s}$$

$$Z(X|\mathbb{F}_p, t) := \exp(\sum_{s=1}^{\infty} N_{p^n} \frac{t^s}{s}) = \frac{1}{(1-t)(1-p^2t)P_2(t)}$$

N est le déterminant du réseau transcendant

$$P_2(t) = \det(1 - tF_p | H^2_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_l))$$

est un polynôme de degré 22

$$H^2_{\mathrm{et}}(X, \mathbb{Q}_l)) = H^2_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}_l)) + H^2_{\mathrm{tr}}(X, \mathbb{Q}_l))$$

$$N_p = \#X(\mathbb{F}_p)$$

$$N_p = 1 + p^2 + \overbrace{\mathrm{Tr} H^2_{\mathrm{alg}}(X, \mathbb{Q}_l))}^{(1)} + \overbrace{\mathrm{Tr} H^2_{\mathrm{tr}}(X, \mathbb{Q}_l))}^{(2)}$$

(1) correspond aux cycles algébriques et dépend du fait que ces cycles soient définis sur $\mathbb{F}_p$ ou sur $\mathbb{F}_{p^2}$

(2) correspond aux cycles transcendants

Par exemple, supposons X singulière et les 20 générateurs du groupe de Néron-Severi definis sur $\mathbb{F}_p$ (cas de Y_2)

$$P_2(t) = (1 - pt)^{20}(1 - \beta t)(1 - \beta' t)$$

$$N_p = 1 + p^2 + 20p + \beta + \beta'$$

Critère de Serre-Livné

Lemme

Soit $\rho_l, \rho'_l : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\, V_l$ deux représentations l-adiques rationnelles vérifiant $\mathrm{Tr} F_{p,\rho_l} = \mathrm{Tr} F_{p,\rho'_l}$ pour un ensemble de nombres premiers p de densité un (i.e. pour tous sauf sauf une infinité). Si ρ_l and ρ'_l forment deux systèmes strictement compatibles, les fonctions L associées à ces systèmes sont les mêmes.

Alors la grande idée est de remplacer cet ensemble de densité un par un ensemble fini.

Définition

Un ensemble fini de nombres premiers T est appelé ensemble test effectif pour une représentation de Galois rationnelle $\rho_l : G_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Aut}\, V_l$ si l'on peut remplacer dans le lemme précédent l'ensemble de densité un par T.

Définition

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers, S un sous-ensemble fini de $\mathcal{P}$ à r éléments, $S' = S \cup \{-1\}$. Définissons pour chaque $t \in \mathcal{P}$, $t \neq 2$ et chaque $s \in S'$ la fonction

$$f_s(t) := \frac{1}{2}(1 + \left(\frac{s}{t}\right))$$

et si $T \subset \mathcal{P}$, $T \cap S = \emptyset$,

$$f : T \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r+1}$$

tel que

$$f(t) = (f_s(t))_{s \in S'} \,.$$

Théorème

(Critère de Serre-Livné) Soit ρ et ρ' deux $G_{\mathbb{Q}}$-représentations 2-adiques non ramifiées en dehors d'un ensemble fini S de nombres premiers, satisfaisant

$$\mathrm{Tr} F_{p,\rho} \equiv \mathrm{Tr} F_{p,\rho'} \equiv 0 \pmod 2$$

et

$$\det F_{p,\rho} \equiv \det F_{p,\rho'} \pmod 2$$

pour tout $p \notin S \cup \{2\}$.
Tout ensemble fini T de nombres premiers disjoint de S tel que $f(T) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{r+1} \setminus \{0\}$ est un ensemble test effectif pour ρ vis à vis de ρ'.

Autre ingrédient: le théorème de modularité de Livné

Théorème

Soit S une surface $K3$ définie sur $\mathbb{Q}$, de nombre de Picard 20 et discriminant N. Son réseau transcendentant $T(S)$ est un $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module de dimension 2 définissant ainsi une série L, $L(T(S), s)$. Il existe une forme modulaire de poids 3, f, CM sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-N})$ satisfaisant

$$L(T(S), s) \doteq L(f, s).$$

En outre, si $NS(S)$ est engendré par des diviseurs définis sur $\mathbb{Q}$,

$$L(S, s) \doteq \zeta(s-1)^{20} L(f, s).$$

Le dernier ingrédient: la classification de Schütt des CM-newforms de poids 3

Théorème

Considérons les classifications suivantes de surfaces $K3$ définies sur $\mathbb{Q}$:

1. par le discriminant d du réseau transcendant de la surface à facteurs carrés près,
2. par la newform associée à twist près,
3. par le niveau de la newform à facteurs carrés près,
4. par le corps CM, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, de la newform associée.

Alors, toutes ces classifications sont équivalentes. En particulier, $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ a pour exposant 1 ou 2.

Soit

$$P_k = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + t^2(xy + xz + yz) - kxyzt.$$

- Y_k est la désingularisation de l'ensemble des zéros de P_k.
- Pour une certaine fibration, Y_k est une surface elliptique avec des fibres singulièrs de type I_n.
- Grâce aux théorèmes de Shioda sur les surfaces elliptiques on calcule le déterminant de $NS(Y_k)$, en particulier, la formule

$$\rho_k = r_k + 2 + \sum_{\nu}(m_{\nu,k} - 1)$$

donne le rang r_k de $MW(Y_k)$.

Quelques ingrédients dans la preuve (suite)

- Si $k = 2$, puisque $\rho_2 = 20$ et que les mauvaises fibres sont I_{12}, I_6, I_2, I_2, I_1, I_1, $r_2 = 0$ (cas facile).
- Alors,

$$\mid \det NS(Y_2) \mid = \frac{\prod m_{\nu,2}}{\text{Torsion}^2} = 8$$

- Si $k = 10$, puisque $\rho_2 = 20$ et que les mauvaises fibres sont I_{12}, I_3, I_3, I_2, I_2, I_1, I_1, $r_{10} = 1$ (cas difficile).
  - Dans ce cas, il faut deviner une section infinie.
  - On doit aussi utiliser une désingularisation de Néron.

Quelques ingrédients dans la preuve (suite)

- La valeur de $\det NS(Y_{10})$ donne le corps CM de la courbe elliptique dans la structure de Shioda-Inose.
- Il faut compter le nombre de points de la réduction de Y_k modulo q ($q = p^r$).
- Lorsque Y_k est modulaire ceci permet de déterminer la forme modulaire donnant l'égalité

$$L(Y_k, s) = L(f, s).$$

- Comparer enfin l'expression de la mesure de Mahler et conclure.

Remarques

- On a

$$\det NS(Y_2) = -8$$

$$\det NS(Y_{10}) = -72$$

aussi les deux courbes elliptiques sous-jacentes E_2 et E_{10} sont toutes les deux CM sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$.

- Puisque

$$L(Y_2, s) = L(Y_{10}, s) = L(f, s),$$

par la conjecture de Tate, Y_2 et Y_{10} sont reliées par une correspondance algébrique.