Curriculum Vitae

Matteo Ruggiero

Né le 30 Avril 1984 à Bonn (Allemagne), nationalité italienne.

Adresse professionnelle

Fondation Mathématique Jacques Hadamard (FMJH-CNRS). Centre de Mathématiques Laurent Schwartz (CMLS) - École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.
Tél : (+33) (0)1 69 33 49 18. E-mail : ruggiero@math.polytechnique.fr
Page web : `http://www.math.polytechnique.fr/~ruggiero/`

Adresse personnelle

14 bis, rue Charles de Gaulle, 91400 Orsay, France.
Tél : (+33) (0)6 52 63 84 49. E-mail : matteoruggiero84@gmail.com

Domaines de recherche

Systèmes dynamiques holomorphes, géométrie complexe, géométrie algébrique, théorie des valuations et singularités.

Formation

- A.U.2002-2007 : Étudiant en Mathématique à la Scuola Normale Superiore (Pise, Italie), et à l'Università di Pisa (Italie).
- 21.07.2005 : Licence en Mathématiques à l'Università di Pisa ; titre du mémoire : "Struttura dell'insieme di Julia per polinomi" (Structure de l'ensemble de Julia pour les polynômes), directeur de mémoire M. Abate, note 110/110 avec les félicitations du jury.
- 12.10.2007 : Laurea (équivalent M2) en Mathématiques à l'Università di Pisa ; titre du mémoire : "Studio della dinamica locale dei punti fissi superattrattivi in $\mathbb{C}^2$ tramite l'albero delle valutazioni" (Étude de la dynamique locale des points fixes superattractifs de $\mathbb{C}^2$ par l'arbre des valuations), directeur de mémoire M. Abate, note 110/110 avec les félicitations du jury.
- 30.10.2008 : Licence en Mathématiques à la Scuola Normale Superiore di Pisa, note 70/70 avec les félicitations du jury.
- 15.03.2011 : Perfezionamento (équivalent Doctorat) en Mathématiques à la Scuola Normale Superiore di Pisa ; titre de la thèse : "The valuative tree, rigid germs and Kato varieties" (Arbre des valuations, germes rigides et variétés de Kato), directeur de thèse M. Abate, note 70/70 avec félicitations du jury.
- 05-06.2011 : Séjour à l'École Polytechnique (Palaiseau, France).
- 09.2011-aujourd'hui : Post-doc de la FMJH à l'École Polytechnique, laboratoire CMLS.

Compétences générales

Langues connues

- Italien : écrit et parlé, langue maternelle.
- Anglais : écrit et parlé, avancé.
- Français : écrit et parlé, avancé.

Compétences informatiques

- Systemes opératifs : Windows et Linux.
- Langages de balisage : Word, Office, Html, Latex.
- Langages de programmation : Fortran90, C, C++, Pascal.
- Autres : Sage.

Enseignement

- A.A. 2007-2008 : Tuteur pour le cours "Matematica I" (Mathematique I) (professeur G. Da Prato, chargé de TD F. Bonsante) à la Scuola Normale Superiore (Pisa, Italie).
- 12-18.07.2008 : Tuteur de Mathématiques pour le cours d'orientation pré-universitaire organisé à Colle di Val D'Elsa (SI, Italie).
- A.A. 2008-2009 : Tuteur pour le cours "Analisi Complessa" (Analyse Complexe)(professeur G. Tomassini, chargé de TD F. Callegaro) à la Scuola Normale Superiore (Pisa, Italie).
- A.A. 2009-2010 (premier semestre) : Tuteur pour le cours "Seminario Fisico-Matematico I" (professeur F. Ricci, chargé de TD A.Mennucci) à la Scuola Normale Superiore (Pisa, Italie).

Séminaires scientifiques

2008

- 10.01.2008 : Pise (Italie), Università di Pisa, "Rigidificazione di germi superattrattivi in $(\mathbb{C}^2, 0)$ tramite blow-up" (Rigidification of superattracting germs in $(\mathbb{C}^2, 0)$ through blow-ups).
- 09.04.2008 : Pise (Italie), Università di Pisa, "Foliazioni olomorfe : Classificazione nel dominio di Siegel (1)".
- 17.04.2008 : Pise (Italie), Università di Pisa, "Foliazioni olomorfe : Classificazione nel dominio di Siegel (2)".
- 24.04.2008 : Pise (Italie), Università di Pisa, "Foliazioni olomorfe : Classificazione nel dominio di Siegel (3)".
- 24.10.2008 : Levico (TN, Italie), CIRM, GNSAGA-INDAM, Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa, "Rigidificazione di germi olomorfi in $(\mathbb{C}^2, 0)$ tramite blow-up".
- 12.11.2008 : Pise (Italie), Centro de Giorgi, "Rigidificazione di germi olomorfi in $\mathbb{C}^2$ tramite scoppiamenti di punti".

2009

- 19.11.2009 : Pisa (Italie), Centro de Giorgi, "Sulla classificazione dei germi semi-superattrattivi in $\mathbb{C}^2$".
- 05.12.2009 : Ann Arbor (Michigan, USA), University of Michigan, RTG Workshop on Complex Dynamics, "On the classification of semi-superattracting germs in $\mathbb{C}^2$" (exposé bref).

- 07.12.2009 : Ann Arbor (Michigan, USA), University of Michigan, Seminars in Several Complex Variables and Complex Dynamics, Fall 2009, “On the classification of semi-superattracting germs in $\mathbb{C}^2$”.

2010

- 19.10.2010 : Levico (TN, Italie), CIRM, GNSAGA-INDAM, Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa, “Costruzione di una 3-varietà complessa compatta con global spherical shell”.
- 10.11.2010 : Pisa (Italie), Centro de Giorgi, “Automorfismi polinomiali di $\mathbb{C}^3$ e varietà di Kato”.

2011

- 14.06.2011 : Levico (TN, Italie), CIRM, GNSAGA, Complex Analysis and Geometry - XX, “On the classification of contracting rigid germs”.

2012

- 26.03.2012 : Marseille 1 (France), LATP, “Germes rigides contractants en toute dimension”.
- 04.09.2012 : Cortona (AR, Italie), New trends in holomorphic dynamics (INDAM), “Attraction rate for iterates of superattracting germs in $\mathbb{C}^2$”.
- 01.10.2012 : Palaiseau (France), Séminaire de Géométrie Ergodique (CMLS), “Taux de contraction des itérés de germes superattractifs de $\mathbb{C}^2$”.
- 05.10.2012 : Bâle (Suisse), Seminar Algebra and Geometry, “Valuative analysis of the dynamics of superattracting germs in $\mathbb{C}^2$”.
- 09.10.2012 : Amiens (France), Séminaire de Probabilités et Théorie Ergodique, “Taux de contraction des itérés de germes superattractifs de $\mathbb{C}^2$”.
- 16.10.2012 : Levico (TN, Italie), Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa, “Attraction rate for iterates of superattracting germs in $\mathbb{C}^2$”.

2013

- 25.01.2013 : Albi (France), Komplex Analysis Workshop (KAWA4), “Attraction rate for iterates of superattracting germs in dimension 2”.
- 18.02.2013 : Paris (France), Paris VII, Séminaire sur les Singularités, “Germes attractifs sur des singularités normales de surface”.
- 08.03.2013 : Lille (France), Séminaires d’Analyse Géométrique, “Automorphismes contractants de singularités normales de surface”.
- 13.03.2013 : Orléans (France), Géométrie et systèmes dynamiques archimédiens et non-archimédiens, “On the dynamics of superattracting germs”.
- 18.03.2013 : Marseille (France), LATP Algèbre, Dynamique et Topologie, “Automorphismes contractants de singularités normales de surface”.
- 08.04.2013 : Grenoble (France), Institut Fourier, Algèbre et Géométrie, “Taux de contraction des itérés de germes superattractifs de $\mathbb{C}^2$”.
- 25.04.2013 : Orsay (France), Séminaire Topologie et Dynamique, “Taux de contraction des itérés de germes superattractifs de $\mathbb{C}^2$”.

Séminaires grand public

– 16.07.2008 : Colle di Val d'Elsa, "Frattali : i disegni del caos".

Publications

[1] M.Abate (editeur) : "Local dynamics of singular holomorphic foliations" - M.Ruggiero : "Dynamics of foliations in the Siegel domain". Edizioni ETS, Dipartimento di Matematica dell'Università di Pisa, Dottorato di ricerca in matematica.

[2] M.Ruggiero : "Rigidification of holomorphic germs with non-invertible differential". Michigan Mathematical Journal, Volume 61 Issue 1, pp. 161–185, 2012. `http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1331222853`.

[3] M.Ruggiero : The valuative tree, rigid germs and Kato varieties. PhD thesis, 2011.

[4] M.Ruggiero : "Contracting rigid germs in higher dimensions". À paraître dans : Annales de l'Institut Fourier, Volume 63, 2013. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1109-6803`.

[5] W.Gignac et M.Ruggiero : "Growth of attraction rates for iterates of a superattracting germ in dimension two". Prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1209.3450`, 2013.

[6] C.Favre et M.Ruggiero : "Normal surface singularities admitting contracting automorphisms". Prépublication sur `http://arxiv.org/abs/1302.6319`, 2013.

[7] M.Ruggiero : "Classification of one dimensional superattracting germs in positive characteristic". Prépublication, 2013.

Domaine de recherche et résumé des travaux effectués

Mes travaux sont centrés sur la dynamique locale des germes de fonctions holomorphes à plusieurs variables. Je m'intéresse plus particulièrement aux applications contractantes et à la construction de compactifications adéquates de l'espace de leurs orbites, ce qui généralise le lien entre difféomorphismes contractants et variétés de Hopf. Les techniques que j'utilise marient la recherche de formes normales, l'étude géométrique des variétés non-kählériennes, l'étude des singularités, et l'action des applications holomorphes sur les espaces de valuations.

1 Dynamique locale

1.1 Formes normales

On s'intéresse au comportement des itérés d'un germe holomorphe $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ qui fixe l'origine.

Pour étudier la dynamique d'une application f autour d'un point fixe, on cherche des coordonnées spéciales dans lesquelles le germe f s'exprime de façon simple. On parle alors de *formes normales* lorsque l'on peut réduire un germe à une application d'un type particulièrement simple par conjugaison. Selon la régularité du changement de coordonnées, on parlera de classification holomorphe, formelle, topologique.

Les formes normales permettent de décrire plus précisément la dynamique autour du point fixe (par exemple quand une application est conjuguée à sa partie linéaire). Mais aussi, surtout en dimension > 1, elles permettent de prouver l'existence de certains objets invariants par la dynamique (voir par exemple [Ste57] pour la construction de sous-variétés invariantes pour automorphismes contractants, et [Kat79b] pour les applications de ce résultat à l'étude des sous-variétés compactes des variétés de Hopf).

1.2 Dynamique holomorphe locale en dimension 1

L'étude dynamique des germes holomorphes en dimension 1 a été initiée par Kœnigs en 1884, lorsqu'il a montré que toute application $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ avec $|f'(0)| \neq 0, 1$ est conjuguée à sa partie linéaire. Peu après, Böttcher a montré que tout germe holomorphe $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ avec $f'(0) = 0$ (superattractif) est conjugué à $z \mapsto z^q$, pour un certain $q \geq 2$.

Pour $|f'(0)| = 1$, la situation est beaucoup plus compliquée.

Si $f(0)$ est une racine de l'unité, on peut supposer $f'(0) = 1$ à itéré près, et f est linéarisable si et seulement si elle est l'identité. Si $f \neq \mathrm{id}$, la dynamique est bien décrite par le théorème des fleurs (de Leau et Fatou). Dans ce cas, les classifications topologique, formelle et analytique différent, et des invariants très fins ont été introduits (voir les travaux de Écalle et Voronin).

Si $f'(0) = e^{2\pi i\alpha}$ avec α irrationnel, tout germe est formellement linéarisable, mais la convergence de la conjugaison formelle dépend des propriétés arithmétiques de bonne approximation de α par les rationnels (problème de petits diviseurs).

De nombreux mathématiciens ont contribué à cette étude, parmi lesquels on peut citer Fatou, Julia, Cremer, Siegel, Brjuno, Sullivan, Douady, Hubbard, Yoccoz, Écalle, Voronin. Voir par exemple [Mil06] pour une présentation détaillée des phénomènes de dynamiques holomorphes en dimension 1.

1.3 Dynamique non-archimédienne locale en dimension 1 - [7]

Plus récemment, ce type de questions sur la dynamique locale a été transporté dans un cadre non-archimédien. On s'intéresse à la dynamique d'un germe analytique $f : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque, et équipé d'une norme (non-archimédienne) complète. L'un des premiers travaux dans cette direction est donné par [HY83], où les auteurs explorent le phénomène des petits diviseurs dans le cadre non-archimédien.

Pour les germes superattractifs, le résultat de Böttcher cité précédemment vaut sur tous corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro, mais n'est plus valable en caractéristique positive. Dans [Rug13a], je donne une classification complète des germes superattractifs en dimension 1 sur un corps algébriquement clos de caractéristique positive. En particulier, je montre le résultat suivant.

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et équipé d'une norme complète. Tout germe superattractif $f : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ est conjugué à une application polynomiale. De plus, deux germes superattractifs formellement conjugués le sont analytiquement.*

En particulier, on répond affirmativement à une question posée par Écalle, qui a conjecturé que deux germes superattractifs formellement conjugués le sont holomorphiquement (en toute dimension, dans le cadre complexe).

À titre d'exemple de formes normales que l'on peut obtenir, voici un énoncé simplifié de mon théorème de classification général.

Théorème. *Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et équipé d'une norme complète. Soit $f : (\mathbb{K}, 0) \to (\mathbb{K}, 0)$ un germe analytique de la forme $f(x) = x^{pc}(1 + o(1))$, avec c et p premiers entre eux. Alors f est conjugué à un germe de la forme*

$$\widetilde{f}(x) = x^{pc}\big(a(x^p) + bx^r\big),$$

où soit $r = 0$, $a \equiv 0$, $b = 1$; soit p ne divise pas r, $b \neq 0$ et a est un polynôme de la forme

$$a(x^p) = \sum_{\substack{0 \leq n < r/(p-1) \\ p \nmid n+r}} a_n x^{pn}, \qquad a_0 = 1.$$

Ces formes normales sont uniques modulo l'action d'un groupe fini.

Cet exemple montre que l'espace des modules des germes superattractifs à conjugaison près n'est pas discret. Dans [Rug13a], j'en décris la structure en détail.

Pour montrer un tel résultat, il faut résoudre l'équation de conjugaison $\Phi \circ f = \widetilde{f} \circ \Phi$, où f est un germe superattractif donné, et les inconnues sont données par le candidat de forme normale $\widetilde{f}$, et le changement de coordonnée à trouver Φ. Pour la classification formelle, je développe toutes les données en séries formelles, et je résout les équations obtenues terme à terme, en procédant par une récurrence délicate. La difficulté principale est donnée par la combinatoire compliquée qui apparaît en caractéristique positive. Une fois obtenue une expression récursive pour les coefficients ϕ_n de $\Phi(x) = \sum_n \phi_n x^n$, on estime la vitesse de croissance de ϕ_n pour montrer que cette série est convergente, en utilisant le principe des séries majorantes.

1.4 Dynamique holomorphe locale en dimension supérieure

Revenons au cadre complexe, et considérons la dynamique d'un germe holomorphe $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$, avec $d \geq 2$. La situation maintenant est sensiblement plus compliquée, mais, comme en dimension 1, le rôle de la différentielle df_0 en 0 est fondamental.

Déjà pour la dynamique locale en dimension 2, plein de questions sont toujours ouvertes (voir [Aba11]), même si plusieurs travaux sur le sujet ont bien décrit la situation dans des cas particuliers. Voir par exemple les travaux de Ueda [Ued86, Ued91], et plus récemment Bedford, Smillie et Ueda [BSU12] sur les automorphismes semi-attractifs (df_0 a une valeur propre égal à 1, et l'autre < 1 en module). Ou encore les travaux de Écalle [Éca85], Hakim [Hak98], Abate [Aba01] Bracci et Tovena [ABT04] sur les germes tangents à l'identité ($df_0 = \mathrm{id}$).

Je suis particulièrement intéressé par les germes contractants (où les valeurs propres de df_0 sont toutes plus petites que 1 en module) et les germes superattractifs (df_0 nilpotent) en toute dimension.

La dynamique locale des germes contractants $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ avec df_0 inversible est bien comprise, grâce aux formes normales de Poincaré-Dulac (voir [Ste57, RR88, Ber06]) : on peut toujours se ramener à un germe polynomial.

Pour les germes superattractifs, on cite les travaux de Hubbard et Papadopol ([HP94]), qui en particulier ont montré qu'en général on ne peut pas se réduire à la partie homogène de plus bas degré, comme en dimension 1. Dans un travail récent, [BEK] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un germe superattractif soit conjugué à sa partie (quasi-)homogène de plus bas degré. Ces conditions portent sur l'existence de champs de vecteurs avec propriétés dynamiques très spécifiques et restrictives.

1.5 Germes contractants et superattractifs, quelques motivations

L'étude de la dynamique locale de germes superattractifs est fondamentale pour comprendre la dynamique globale des morphismes polynomiaux de l'espace affine.

En dimension 1, le résultat de Böttcher permet de décrire efficacement l'ensemble de Julia des polynômes. En effet, un polynôme $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de degré $q \geq 2$ étant donné, on peut considérer son action à l'infini, qui définit un germe superattractif $f : (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. La forme normale de Böttcher nous fournit des coordonnées polaires dans un voisinage de l'infini, compatibles avec la dynamique de P. Les courbes de niveau de la coordonnée angulaire, appelées rayons extérieurs, permettent d'étudier les propriétés de connexion locale de l'ensemble de Julia de P (voir [DH84, DH85]).

Une situation analogue se présente en dimension 2. Les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ se factorisent en composition d'automorphismes de 2 classes (voir [FM89]) : les automorphismes élémentaires, dont la dynamique est facile à étudier, et les automorphismes de Hénon, qui sont de la forme :

$$f(x,y) = (P(x) - ay, x), \quad \text{avec } P \in \mathbb{C}[x], \deg P \geq 2, a \in \mathbb{C}^*.$$

Dans ce dernier cas, l'action à l'infini induit sur le point fixe $[1:0:0]$ un germe superattractif.

L'étude de la dynamique locale de ce germe à l'infini permet de comprendre certains aspects fins de la dynamique des automorphismes de Hénon. Dans cette direction, on peut citer la série de travaux de Bedford Smillie et Lyubich (voir par exemple [Bed91, BS91, BLS93]), Hubbard et Oberste-Vorth [HOV94], Fornaess et Sibony [FS92] et encore Hubbard Papadopol et Veselov [HPV00].

La dynamique des germes contractants a aussi des applications très intéressantes en géométrie complexe. Soit par exemple $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ un germe contractant avec df_0 inversible. L'espace des orbites de f définit une variété complexe compacte non-kählérienne, appelée *variété de Hopf* (primaire). Grâce aux formes normales de Poincaré-Dulac, on obtient une classification des variétés de Hopf qui permet d'étudier leur structure en détail : existence de sous-variétés, de fibrations, de feuilletages, de courants positifs fermés, etc. (voir par exemple [Kat79b]).

Dans la suite, on verra une généralisation de cette construction pour des germes superattractifs $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ de degré topologique égal à 1, qu'on appelle *germes stricts*. Un exemple fondamental de germe strict est donné par l'action à l'infini d'un automorphisme de Hénon cité ci-dessus. En dimension 2, pour de tels germes on peut toujours construire une compactification de l'espace des orbites qui est une surface complexe compacte non-kählerienne, dite *surface de Kato*.

Germes rigides

Une des difficultés pour l'étude des formes normales des germes superattractifs $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ est donnée par la richesse de structure de l'ensemble critique $C(f)$, et plus généralement de l'union $C(f^\infty) = \bigcup_{n=1}^\infty C(f^n)$ des ensembles critiques des itérés (appelé *ensemble critique généralisé*).

En général, l'ensemble critique généralisé est formé d'une quantité dénombrable de composantes irréductibles (pas forcement lisses). Cette richesse de structure donne une obstruction insurmontable à la recherche des formes normales à conjugaison holomorphe (ou même formelle) près.

Dans [Fav00], Favre considère une condition très restrictive sur la géométrie de l'ensemble critique généralisé (pour germes holomorphes en dimension 2), qui lui permet dans ce cas de trouver des formes normales polynomiales relativement simples.

Définition. Un germe holomorphe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ est dit *rigide* si son ensemble critique généralisé $C(f^\infty)$ est à croisements normaux simples et totalement invariant.

Remarquons que en dimension 2 tout germe strict est rigide ; les formes normales de [Fav00] permettent de retrouver des propriétés géométriques du bassin d'attraction à l'infini pour les applications de Hénon (voir [HOV94]).

1.6 Germes rigides contractants en toute dimension - [3,4]

Dans [Rug13b] j'ai partiellement étendu la classification des germes rigides dans [Fav00] en dimension supérieure. En particulier j'ai mis au jour des phénomènes nouveaux de résonances entre les valeurs propres de la différentielle et celles de l'action sur le groupe fondamental du complémentaire de l'ensemble critique généralisé. Pour mieux comprendre le nouveau type de résonance qui apparaît en dimension supérieure, considérons un exemple très spécifique. Soit $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ un germe contractant, et supposons que l'ensemble critique généralisé s'écrive comme $C(f^\infty) = \{xyz = 0\}$ pour des coordonnées adéquates (x, y, z) en 0. Comme $C(f^\infty)$ est invariant par itération négative, f induit une action f_* sur $\pi_1(\Delta \setminus C(f^\infty)) \cong \mathbb{Z}^3$, où Δ est un petit polydisque centré en 0. Considérons le cas où $\text{rank}(df_0) = 1$; alors on obtient :

Théorème. *Soit* $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ *comme précédemment, et soit* λ *la valeur propre non nulle de* df_0*. Supposons que* $f_* : \pi_1(\Delta \setminus C(f^\infty)) \to \pi_1(\Delta \setminus C(f^\infty))$ *soit injectif. Alors* f *est holomorphiquement conjugué à*

$$(x, y, z) \mapsto \big(\lambda x, \alpha_1 x^{a_1} y^{b_1} z^{c_1}(1 + \varepsilon x^u), \alpha_2 x^{a_2} y^{b_2} z^{c_2}\big),$$

avec $a_1 + a_2 \geq 1$*,* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^*$*,* $b_1 c_2 \neq b_2 c_1$*. Soit*

$$D = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix};$$

alors $\varepsilon = 0$ *à moins que* λ^u *ne soit une valeur propre de* D *(nouveau cas de résonance).*

Notons que dans l'énoncé ci-dessus f_* est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Dans [Rug13b] je montre un résultat analogue en toute dimension, pour tout nombre de composantes irréductibles de $C(f^\infty)$ (à croisements normaux simples), et pour toute valeur de $\mathrm{rank}(df_0)$.
La condition sur l'injectivité de f_* est justifiée par les faits suivants :

– en dimension 2 tout germe rigide f avec f_* non-injectif est (birationnellement) conjugué à un autre germe rigide g avec g_* injectif.
– dans de nombreuses applications de l'étude de ces formes normales en dimension 2 (dynamique des automorphismes de Hénon, surfaces de Kato, problème de rigidification), on peut toujours se ramener au cas où f_* est injectif.

Remarquons que ces formes normales impliquent l'existence de feuilletage(s) holomorphe(s) invariant(s), fait pas du tout évident à priori.

Encore une fois, calculer des formes normales signifie résoudre l'équation de conjugaison $\Phi \circ f = \widetilde{f} \circ \Phi$, où le changement de coordonnées Φ et le candidat de forme normale $\widetilde{f}$ sont les inconnues de l'équation. On développe toutes les données de l'équation de conjugaison en séries formelles, et on résout l'équation de conjugaison terme à terme.

La combinatoire qui se présente dans ce cadre en toute dimension est extrêmement ardue et complexe à analyser. Dans ce travail, je mets à point des techniques originales très efficaces pour gérer ce type de calculs formels. Grâce à cette technologie, on arrive à calculer avec précision les obstructions formelles à la monomialisation d'un germe. Une fois que la classification formelle est atteinte, on utilise les propriétés contractantes de la dynamique de f pour montrer la convergence de la conjugaison.

1.7 Problème de rigidification - [2,3]

Comme on a déjà remarqué, la structure trop riche de l'ensemble critique généralisé d'un germe superattractif (en dimension ≥ 2) est un sérieux obstacle à la recherche de formes normales à conjugaison près.

Néanmoins, en suivant les analogues pour les feuilletages [Sei68] ou pour les applications birationnelles dominantes $f : X \to Y$ entre surfaces complexes non-singulières [AKMW02], on peut chercher une classe de germes plus simple à laquelle on peut se réduire à *éclatement* près.

En 2007, Favre et Jonsson prouvent que la classe recherchée est exactement la classe des germes rigides. Dans [Rug12] j'ai par la suite généralisé ce résultat au cas des germes holomorphes pas nécessairement superattractifs. Le résultat que j'obtiens peut être énoncé comme suit.

Théorème. *Soit* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ *un germe holomorphe tel que* $\det df \not\equiv 0$*. Alors il existe une suite d'éclatements de points* $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$*, et un point* $p \in \pi^{-1}(0)$*, tels que l'application méromorphe* $\hat{f} = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ *admet un point fixe* p *au voisinage duquel elle définit un germe rigide.*

La démonstration suit la méthode de [FJ07], et repose de manière essentielle sur l'étude de l'action $f_\bullet$ induite par f sur l'ensemble $\mathcal{V}$ des valuations $\nu : \mathbb{C}[[x, y]] \to [0, +\infty]$ convenablement rénormalisées. C'est un fait important que cet espace est un arbre réel : cette structure un dimensionnelle est utilisée d'une façon cruciale dans la preuve pour construire un point fixe attractif pour l'action de $f_\bullet$, ce qui permet de conclure.

Si la différentielle df_0 de f en 0 admet une valeur propre non nulle, la dynamique de $f_\bullet : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sur l'arbre des valuations est plus simple à décrire. Dans ce cas là, on déduit dans [Rug12] l'unicité du procédé de rigidification.

1.8 Taux de contraction des itérés d'un germe - [5]

Soit $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe superattractif tel que $\det df \not\equiv 0$. Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de l'anneau de germes de fonctions holomorphes $\phi : (\mathbb{C}^2, 0) \to \mathbb{C}$. Le taux de contraction de f est défini par $c(f) = \max\{k \ : \ f^*\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^k\}$, et est un invariant de conjugaison (formelle). De façon équivalente, on peut définir $c(f)$ comme le maximum parmi les $c > 0$ tels que $\|f(x)\| \lesssim \|x\|^c$ pour x petit. La suite $(c(f^n))_n$ des taux de contraction des itérés de f exprime donc la vitesse de convergence d'un point x vers 0 sous itération. La question qu'on se pose est de comprendre le comportement de cette suite $(c(f^n))_n$.

Si f est un germe superattractif donné, pour une application linéaire A *générique*, la suite des taux de contraction pour $A \circ f$ est multiplicative : $c((A \circ f)^n) = c(A \circ f)^n$. Par contre, en général la suite pour f satisfait seulement la propriété sur-multiplicative suivante : $c(f^{m+n}) \geq c(f^m)c(f^n)$.

Dans un travail en collaboration avec William Gignac [GR13], on montre le résultat suivant.

Théorème. *La suite* $(c(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ *satisfait une relation de récurrence linéaire à coefficients entiers pour* n *assez grand : ils existent* $a \in \mathbb{N}$*,* $b \in \mathbb{Z}$*,* $m \in \mathbb{N}^*$ *tels que*

$$c(f^{n+2m}) = ac(f^{n+m}) + bc(f^n), \qquad \textit{pour } n \gg 0.$$

Pour simplicité, supposons que le germe $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ soit fini (c'est-à-dire, il n'existe pas de courbe $C \ni 0$ tel que $f(C) = 0$). La preuve du théorème repose sur un résultat de nature plus géométrique.

Soit $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ une *modification*, i.e., une application birationnelle propre qui induit un biholomorphisme sur $X \setminus \pi^{-1}(0)$. Soit $\mathcal{D}_\pi$ l'espace vectoriel des $\mathbb{Q}$-diviseurs engendrés par les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0)$. Le relèvement $\pi^{-1} \circ f \circ \pi : X \dashrightarrow X$ induit un tiré en arrière $\mathbb{Z}$-linéaire $f^* : \mathcal{D}_\pi \to \mathcal{D}_\pi$. Or, le taux de contraction $c(f)$ peut être calculé comme l'intersection $-f^*E_\pi \cdot E_\pi$, pour un diviseur $E_\pi \in \mathcal{D}_\pi$ bien choisi. On cherche à trouver un modèle X où le tiré en arrière f^* soit fonctoriel, c'est-à-dire, tel que $(f^n)^* = (f^*)^n$ pour tout n. Un tel modèle est dit *algébriquement stable* (concept introduit par Fornaess et Sibony [FS95]).

En général un modèle n'est pas algébriquement stable, et dans [GR13] on donne effectivement un exemple de germe superattractif fini $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ qui n'admet pas de modèle algébriquement stable. En revanche, il existe toujours un modèle $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ où la propriété de stabilité algébrique est atteinte asymptotiquement.

Théorème. *Soit* $f : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ *un germe superattractif fini. Alors il existe un* $N \gg 0$ *et une modification* $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$*, où* X *admet au plus des singularités quotient cyclique, tels que le tiré en arrière* $f^* : \mathcal{D}_\pi \to \mathcal{D}_\pi$ *satisfait*

$$(f^n)^* = (f^*)^{n-N}(f^N)^* \qquad \textit{pour tout } n > N.$$

La preuve de ces résultats suit une stratégie proche de la preuve d'un résultat analogue [FJ11] donnée par Favre and Jonsson dans le cadre d'applications polynomiales $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

La propriété de stabilité algébrique est reliée au comportement des images des courbes exceptionnelles par l'action des itérés du relevé de f, et leur interaction avec les points d'indétermination. Il nous faut donc un formalisme qui puisse gérer en même temps ce type de propriétés dynamiques en tout modèle. Le formalisme qu'on utilise est celui du graphe dual universel, et sa compactification l'arbre des valuations. Grâce à une analyse très détaillée de la dynamique $f_\bullet$ induite par f sur l'espace des valuations, on arrive à montrer l'existence d'un modèle que satisfait la condition de stabilité algébrique asymptotique.

Le cœur de l'article consiste en montrer que $f_\bullet$ satisfait une propriété d'*équicontinuité* adéquate. L'équicontinuité de $f_\bullet$ nous permet de montrer des propriétés d'attraction globale pour $f_\bullet$ vers des points fixes (appelés *valuations propres*).

1.9 Notes sur les feuilletages en dimension 2 - [1]

Les notes [Aba09] sont le résultat d'un groupe de travail sur feuilletages holomorphes en dimension 2. On y expose le théorème de désingularisation de Seidenberg [Sei68], et l'étude des singularités réduites à changement de coordonnées près. Dans cette ouvrage ([Rug09]) j'expose le cas d'une singularité de Siegel, dont la partie linéaire de la 1-forme qui donne la feuilletage est telle que le rapport de ses valeurs propres appartient à $(-\infty, 0)$. J'expose les résultats d'existence de deux séparatrices complexes, le résultat de classification par holonomie de Mattei et Moussu [MM80], et la construction d'un germe de feuilletage dans le domaine de Siegel à holonomie prescrite par Yoccoz et Perez-Marco [PMY94].

2 Dynamique holomorphe et géométrie complexe

2.1 Automorphismes contractants sur une singularité normale de surface - [6]

Dans un travail en collaboration avec Charles Favre [FR13], on s'intéresse à la dynamique d'un germe analytique $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$ sur une singularité normale de surface. Notons que l'espace des endomorphismes non-inversibles et des automorphismes est très vaste (de dimension infinie) pour toute singularité (voir par exemple [Mül87]). Cependant, l'existence de systèmes dynamiques "spéciaux" implique des restrictions très fortes sur la structure de la singularité.

En cette direction, un théorème de Wahl [Wah90] dit que si $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$ est un endomorphisme non-inversible et *fini* sur une singularité normale de surface, alors $(Y, 0)$ est forcément une singularité log-canonique.

Dans [FR13], on considère les singularités normales de surface qui portent un automorphisme *contractant* $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$, i.e., tel qu'il existe un voisinage ouvert U de 0 en Y tel que $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \{0\}$.

Théorème. *Soit $(Y, 0)$ une singularité normale de surface. S'il existe un automorphisme contractant $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$, alors $(Y, 0)$ est forcément une singularité quasi-homogène.*

De plus, on présente des formes normales de tels germes, à conjugaison près. Pour une description détaillée des singularités quasi-homogènes de surface, voir [OW71, Dol75, Pin77].

Pour tout automorphisme contractant $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$, l'espace des orbites $Y \setminus \{0\}/\langle f\rangle$ définit une variété complexe compacte $S(f)$. Comme corollaire on obtient de manière constructive un résultat déjà connu par Kato [Kat79a].

Corollaire. *Soit $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$ un automorphisme contractant sur une singularité normale de surface. Alors $S(f)$ est une variété complexe compacte non-kählérienne. De plus, soit $S(f)$ est* *une surface de Hopf, soit elle est le quotient d'un fibré elliptique principale sur une courbe lisse, par l'action libre d'un groupe fini qui préserve cette fibration.*

Nos résultats étendent la classification de singularités de surface qui portent une bonne action $\mathbb{C}^*$, voir [OW71]. Nos techniques marient à la fois l'étude dynamique de relèvement de f sur une désingularisation bien choisie de $(Y, 0)$, et la géométrie des singularités. La preuve consiste essentiellement de deux étapes.

D'abord, on considère une désingularisation bien choisie $\pi : X \to (Y, 0)$, et on analyse la dynamique du relèvement $F : X \to X$ de f sur le diviseur exceptionnel W. La propriété de contraction de F nous donne des restrictions sur le graphe dual de W : il est étoilé, avec toute composante irréductible (sauf au plus le centre $E_\star$) rationnelle.

Après, on montre que soit $(Y, 0)$ est une singularité quotient cyclique, soit $F|_{E_\star}$ est d'ordre fini. Dans le dernier cas, le point clef est réussir à linéariser à la fois un voisinage de $E_\star$ dans X et la dynamique de F y dessus. Pour cela, on construit un feuilletage invariant par F et transverse à $E_\star$, en utilisant le comportement attractif de F autour de $E_\star$.

2.2 Surfaces de Kato

Masahide Kato a considéré dans [Kat78] la situation suivante.

Définition. Soit $B \subset \mathbb{C}^d$ la boule ouverte de rayon 1 et centre 0. Une *donnée de Kato* (π, σ) est un couple formé d'une modification $\pi : X \to B$ au dessus de 0, et d'un biholomorphisme $\sigma : B \to \sigma(B) \Subset X$.

À partir d'une telle donnée, on peut construire une variété complexe compacte $S(\pi, \sigma)$, dite *variété de Kato*, en prenant le quotient de $X \setminus \sigma(\overline{B})$ par l'action de $\sigma \circ \pi$.

L'application $f = \pi \circ \sigma : B \to B$ définit un germe contractant en 0, dit *germe de Kato*.

En dimension 2, les germes de Kato sont exactement les germes stricts.

Les propriétés de ces variétés sont bien connues en dimension 2, grâce aux travaux de Kato, Nakamura, Dloussky, Oeljeklaus, Toma. Les surfaces de Kato ont une dimension de Kodaira négative, et leur premier nombre de Betti est égal à 1 (en particulier ces surfaces sont non-kählériennes). Une conjecture très importante en géométrie complexe affirme que toute surface complexe compacte avec les propriétés ci-dessus et deuxième nombre de Betti $b_2 > 0$ est forcement une surface de Kato. La conjecture à été montrée par Teleman [Tel05, Tel10] pour $b_2 = 1, 2$, voir aussi [DOT03].

Les surfaces de Kato $S = S(\pi, \sigma)$ ont un lien très étroit avec la dynamique des germes associés $f = \pi \circ \sigma$. En fait, S est une compactification de l'ensemble des orbites par f, et il y a une correspondance entre les objets invariants par f, et les objets analogues dans S.

Les formes normales pour les germes rigides contractants ont bien poussé en avant l'étude des surfaces de Kato et leur classification, en permettant de déterminer l'existence d'objets invariants, comme des courbes ([Nak84, Dlo84]), champs de vecteurs et feuilletages ([DO99]), courants positifs fermés ([Tom08]), et donc des objets géométriques analogues sur les surfaces associées. Le cas le plus flagrant de l'importance des formes normales est donné probablement par [DOT01], où la classification des germes stricts contractants est un des ingrédients essentiels pour obtenir la classification complète des surfaces de classe VII avec champs de vecteurs.

2.3 Variétés de Kato en dimension 3 - [3]

En dimension 3, on est bien loin d'une classification des variétés complexes compactes, et, bien qu'il existe déjà quelques constructions de variétés non-kählériennes (à partir des variétés de Hopf, voir par exemple [Mee00, Bos01, San87, OR06]), on aimerait bien trouver d'autres exemples de variétés non-kählériennes dont on comprenne la géométrie.

Dans ma thèse [Rug11], j'ai étudié en détail un exemple de variété de Kato de dimension 3. Pour cela, j'ai considéré un automorphisme polynomial spécifique de $\mathbb{C}^3$ dont l'ensemble d'indétermination à l'infini n'intersecte pas celui de son inverse (i.e., il est régulier au sens de Sibony [Sib99]), propriété satisfaite en dimension 2 par les automorphismes de Hénon.

Les résultats obtenus peuvent être résumés dans l'énoncé suivant.

Théorème. *Soit $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'automorphisme polynomial donné par*

$$f(x, y, z) = (x^2 + cy^2 + z, y^2 + x, y) \qquad \text{avec } c \in \mathbb{C}.$$

L'action de f sur le point à l'infini $p = [0 : 0 : 1 : 0]$ définit un germe superattractif f_p qui admet une décomposition comme germe de Kato $f_p = \pi \circ \sigma$. Toute variété S biméromorphiquement équivalente à la variété de Kato $S(\pi, \sigma)$ satisfait les propriétés suivantes :

- *S est obtenue comme la compactification de l'espace des orbites par f de points qui partent à l'infini sous itération positive, en ajoutant un diviseur adéquat E ;*
- *S a une dimension de Kodaira négative ;*
- *le premier nombre de Betti de S est égal à 1 (en particulier, S est non-kählérienne) ;*
- *le diviseur E ne se contracte pas sur un point ;*
- *S admet un feuilletage holomorphe de codimension 1 ;*
- *les seules courbes compactes de S appartiennent à E.*

Le choix de cet automorphisme est dû au fait que il est (essentiellement) l'unique automorphisme régulier de $\mathbb{C}^3$ de degré 2 à conjugaison près. Cette même classe d'automorphismes avait été considéré par Oeljeklaus et Renaud [OR06] pour construire une compactification de l'espace des orbites partant à l'infini, mais sous itération négative.

L'étude de cet exemple repose sur la décomposition explicite $f_p = \pi \circ \sigma$. Une fois fixé une telle décomposition (qui n'est pas du tout unique), on peut calculer les nombres de Betti de $S(\pi, \sigma)$, les fibrés normaux et les intersections de toutes composantes irréductibles de E dans $S(\pi, \sigma)$. On en déduit les informations sur la dimension de Kodaira. On adapte un critère dû à Grauert [Gra62] pour montrer que le diviseur E ne peut pas être contracté sur un point (en contraste avec le cas de dimension 2). On utilise enfin les formes normales dans [Rug13b] pour en déduire l'existence d'une feuilletage de codimension 1 et étudier la structure des courbes compactes dans $S(\pi, \sigma)$.

Travaux en cours et projets de recherche

1 Variétés complexes compactes non kählériennes

1.1 Données admissibles

En un projet en commun avec Charles Favre, on développe un cadre très général pour construire des variétés complexes compactes, qui généralisent à la fois les variétés de Kato et les surfaces obtenues comme espace des orbites d'automorphismes contractants sur singularités normales isolées. Ces variétés sont obtenues comme une compactification adéquate de certains systèmes dynamiques locaux, construits comme suit.

Définition. Soit X une variété normale, W un sous-espace analytique *compact* de X, et $F : X \dashrightarrow X$ est un biméromorphisme de X qui induit un biholomorphisme avec l'image sur $X \setminus W$. Supposons en plus que $F(W) = W$, $F(X) \Subset X$, et $\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(X) \subseteq W$. Le triplet $\mathcal{H} = (X, W, F)$ est appelé *donnée admissible*.

À une telle donnée admissible $\mathcal{H}$, on peut toujours associer une variété complexe compacte $S(\mathcal{H})$ comme suit. Soit U un voisinage de $W \cup F(X)$ relativement compact dans X. Alors

$$S(\mathcal{H}) = X \setminus \overline{F(U)} / \langle F \rangle.$$

On veut comprendre les propriétés géométriques de ces variétés, comme par exemple la dimension de Kodaira, la dimension algébrique, les espaces de cohomologie et de déformations, la structure des sous-variétés compactes, l'existence de feuilletages holomorphes, de courants positifs fermés, etc. On considère les données admissibles à équivalence près, pour une relation d'équivalence qui implique que les deux variétés associées sont biméromorphes.

Dans le cas d'automorphismes contractants, deux automorphismes contractants sont conjugués si et seulement si les données admissibles associées sont équivalentes.

Le travail [FR13] peut être donc vu comme une classification des données admissibles associées aux automorphismes contractants de singularités normales de surface, et la description géométrique des surfaces obtenues par cette construction.

1.2 Données admissibles en dimension 2

Dans un travail en cours avec Charles Favre, on généralise les résultats de [FR13] au cas des données admissibles $\mathcal{H} = (X, W, F)$ en dimension 2.

Les techniques utilisées varient selon les propriétés dynamiques et géométriques de $\mathcal{H}$.

Si $F(X \setminus W) \subset X \setminus W$ et si la forme d'intersection de W est définie négative, par un théorème de Grauert [Gra62] W peut être contracté sur une singularité normale, et on retrouve le cas d'automorphismes contractants. Si on quitte l'hypothèse de négativité sur la forme d'intersection de W, une partie des techniques utilisées dans [FR13] peut être adaptée, mais de nouvelles difficultés apparaissent. Par exemple, W n'admet plus un voisinage fortement pseudoconvexe, ce qui nous donne une obstruction à la construction d'un potentiel plurisousharmonique, et une difficulté technique supplémentaire. En plus, la construction d'une donnée admissible $\mathcal{H}' = (X', W', F')$ équivalente à $\mathcal{H}$ et où X' est lisse et F' est holomorphe est plus délicate. Il nous faudra adapter les techniques à la Diller-Favre [DF01] pour surmonter cette difficulté.

Le cas $F(X \setminus U) \cap W \neq \emptyset$ est de nature très différente. Si en plus $F(W)$ est un point et W a une forme d'intersection définie négative, la surface associée est une surface de Kato (voir [Kat79a]). Pour classifier de telles données admissibles à équivalence près, on utilise des techniques valuatives, en étudiant l'action induite par F sur un espace de valuations bien choisi.

1.3 Automorphismes contractants sur des singularités normales isolées en toute dimension

La structure des données admissibles paraît délicate à comprendre en dimension plus grande.

Dans le cas de données admissibles qui proviennent d'un automorphisme contractant $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$, une partie des techniques utilisées dans [FR13] peut être appliquée en toute dimension. La difficulté principale pour l'étude de ces automorphismes est de contrôler la dynamique induite par f sur le diviseur exceptionnel d'une désingularisation de $(Y, 0)$.

En dimension 3, on peut utiliser la classification de champs de vecteurs sur les surfaces complexes compactes. Cette classification nous donne des restrictions sur la géométrie des surfaces qui peuvent apparaître dans le complexe dual d'une désingularisation bien choisie. En utilisant encore les propriétés de contraction de f, on pourra en déduire d'autres restrictions sur la structure du complexe dual de cette désingularisation.

En particulier, on peut poser la question suivante.

Question. *Soit $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$ un automorphisme contractant sur une singularité normale isolée (de dimension 3). Soit $\pi : X \to (Y, 0)$ une désingularisation telle que $\pi^{-1}(0)$ est à croisements normaux simples.*

Est-ce que le complexe dual de $\pi^{-1}(0)$ est homotope à un point ?

1.4 Variétés de Kato en dimension supérieure

En toute généralité, la classification des données admissibles est sûrement un projet ambitieux. Les raisons en sont multiples. On se focalise sur le cas des variétés de Kato.

- En dimension $d \geq 3$, un germe de Kato n'est pas forcément rigide ; par exemple, ils existent des germes de Kato $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ pour lesquels $C(f^\infty)$ a une infinité de composantes irréductibles.
- Soit $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ un germe strict. On ne sait pas si un tel germe admet une factorisation comme germe de Kato $f = \pi \circ \sigma$.
- Soit $f : (\mathbb{C}^d, 0) \to (\mathbb{C}^d, 0)$ un germe de Kato. La factorisation $f = \pi \circ \sigma$ n'est pas du tout unique, et il n'y a plus un modèle minimal qu'on puisse choisir, comme en dimension 2.
- Même pour les germes de Kato f avec $C(f^\infty)$ à croisements normaux, il n'y a pas de formes normales qu'on puisse utiliser.
- La structure d'une application birationnelle en dimension 3 peut être très compliquée. Ce n'est pas nécessairement une suite d'éclatements (voir [Bon02]), et même lorsque c'est le cas, la dimension des centres d'éclatement peut être positive, ce qui nous force à prendre en considération leur géométrie.

Actuellement, je poursuis mes recherches dans deux directions.

D'une part, j'analyse des exemples particuliers en détail, en tentant de pousser les calculs de leurs invariants basiques, comme la dimension algébrique, la cohomologie des faisceaux, leur espace des déformations, ou l'existence des objets comme sous-variétés compactes, champs de vecteurs, feuilletages, courants positifs fermés. Dans des cas spéciaux de germes de Kato $f = \pi \circ \sigma$, on pourra utiliser les formes normales dans [Rug13b] et en déduire des informations sur les variétés de Kato associées.

D'autre part, j'étudie les propriétés générales des données admissibles, en utilisant à la fois des techniques dynamiques et des techniques algébriques, qui peuvent enrichir les techniques déjà présents en littérature pour l'étude de variétés obtenues comme quotient par l'action cocompacte d'un groupe discret (voir par exemple [OT05, Ver13, Bos01, Bat13]).

Comme exemple de possibles questions qu'on peut se poser, je présente la situation suivante. Soit $f = \pi \circ \sigma$ un germe de Kato. On peut considérer l'action $f_\bullet$ induite par f sur l'espace $\mathcal{V}$ des valuations (convenablement rénormalisées) centrées en 0. En dimension 2 les propriétés de l'arbre des valuations et des actions induites par des germes sont très bien connues, et on peut montrer que $\bigcap_n f_\bullet^n(\mathcal{V}) = \{\nu_\star\}$ consiste d'une seule valuation non-divisorielle. Selon le type de $\nu_\star$ (valuation de courbe, irrationnel, infiniment singulier), on peut distinguer le type de surface de Kato associé (Enoki, Inoue-Hirzebruck, ou les surfaces de Kato intermédiaires respectivement), et en particulier en déduire la structure de ses courbes compactes. Voir [FJ04] pour une description précise de l'espace des valuations, et [Dlo84] pour une description des types de surface de Kato.

En dimension 3, on peut poser les questions suivantes.

Question. *Soit $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de Kato. Sous quelles conditions l'ensemble $\bigcap_n f_\bullet^n(\mathcal{V})$ est formé d'un seul point $\nu_\star$? Quel type de valuation $\nu_\star$ peut-on obtenir d'une telle façon ? Quelle est la structure des sous-variétés compactes pour les variétés de Kato associées ?*

2 Dynamique locale des germes contractants

2.1 Conjecture d'Écalle en dimension 2

Écalle a conjecturé que deux germes superattractifs formellement conjugués le sont holomorphiquement, et ce en toute dimension.

On sait que cette conjecture est vraie en dimension 1 (par le théorème de Böttcher), et pour les germes superattractifs *rigides* en dimension 2 (voir [Fav00]).

Dans un travail en collaboration avec Charles Favre, on se propose de montrer que cette conjecture est vraie en dimension 2. La stratégie que nous proposons est la suivante. Soient f, g deux germes superattractifs en $\mathbb{C}^2$, et supposons qu'il existe une conjugaison formelle $\phi \circ f = g \circ \phi$.

Par les résultats de [FJ07], il existe $\pi : X \to (\mathbb{C}^2, 0)$ et $\mu : Y \to (\mathbb{C}^2, 0)$ suites d'éclatements de points, et deux points $p \in \pi^{-1}(0)$ et $q \in \mu^{-1}(0)$ tels que $\pi^{-1} \circ f \circ \pi$ et $\mu^{-1} \circ g \circ \pi$ définissent des germes rigides $\hat{f}$ et $\hat{g}$ en p et q respectivement. D'abord, on montre qu'on peut choisir π et μ de telle façon que la conjugaison formelle ϕ induit une conjugaison formelle $\hat{\phi}$ entre $\hat{f}$ et $\hat{g}$. Si $\hat{f}$ (et donc $\hat{g}$) est contractant, on sait par [Fav00] que la conjecture d'Écalle est valide, et donc que $\hat{\phi}$ est convergente. Dans ce cas là, on peut conclure que ϕ est de sa part convergente, en procédant par récursion sur le nombre d'éclatements de π et μ. Dans le cas non-contractant, il nous faut une analyse plus détaillée des formes normales pour ce type de germes.

2.2 Rigidification et taux de contraction sur singularités normales de surface

Les problématiques de classification à conjugaison birationnelle près et de déterminer les suites possibles pour le taux de contraction des itérés d'un germe nous intéressent aussi dans le cadre singulier.

Dans le cas lisse, les deux résultats se basent sur l'étude de la dynamique induite sur l'arbre des valuations $\mathcal{V}$. De même, à une singularité isolée $(Y, 0)$ on peut associer un espace de valuations $\mathcal{V}_Y$ (voir [Fav10]). L'espace $\mathcal{V}_Y$ perd sa structure d'arbre réel, et la dynamique induite par un germe $f : (Y, 0) \to (Y, 0)$ est plus délicate à étudier.

Dans le cas où f est fini, on peut utiliser la classification de Wahl [Wah90], et étudier la dynamique des formes normales de tels germes fournies par [Fav10].

2.3 Germes rigides en caractéristique positive

Ces problématiques peuvent bien s'énoncer aussi dans le cadre des germes analytiques $f : (\mathbb{K}^2, 0) \to (\mathbb{K}^2, 0)$, où $\mathbb{K}$ est un corps quelconque. Les travaux [FJ07, GR13] marchent directement si $\mathbb{K}$ est de caractéristique zéro. Dans le cas de caractéristique $p > 0$, il faudra utiliser des techniques plus géométriques, et gérer l'existence de morphismes non-constants à dérivée nulle (comme l'automorphisme de Frobenius $F(x) = x^p$).

En même temps, je veux classifier les germes rigides contractants sur un corps de caractéristique positive en dimension 2.

Le premier cas que je voudrais considérer est donné par les germes de la forme

$$f(x, y) = (\lambda x(1 + h(x, y)), x^b y^c (1 + g(x, y)),$$

avec $h(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $c \geq 2$, $b \geq 0$. Pour le germes de cette forme, $\{xy = 0\}$ est totalement invariant. Par les résultats de [Rug13b], à conjugaison analytique près on peut supposer $h \equiv 0$. Si c et p la caractéristique du corps sont premiers entre eux, alors à conjugaison analytique près on peut aussi supposer $g \equiv 0$. Si c est un multiple de p, la situation est analogue au cas considéré dans [Rug13a]. On peut se poser la question suivante.

Question. *Est-ce que l'application f définie ci-dessus est (analytiquement) conjugué à un germe de la forme*

$$(x, y) \mapsto \big(\lambda x, x^b y^c (1 + P(y))\big),$$

pour un quelque polynôme $P \in \mathbb{K}[y]$?

2.4 Germes rigides en toute dimension

Je poursuis ma recherche d'une classification des germes rigides contractants en toute dimension.

On cherche à trouver des sous-classes bien choisies de germes "rigides", et en trouver des formes normales intéressantes.

Il paraît raisonnable de se focaliser sur la dimension 3. Le seul cas non étudié dans [Rug13b] est d'un germe contractant $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}^3, 0)$ avec $C(f^\infty) = \{x = 0\}$. Cette seule hypothèse ne suffit pas à fournir une classification complète, car la géométrie de ces germes est encore trop vaste.

Il nous faut donc trouver des conditions additionnelles de rigidité pour trouver la juste classe de germes rigides à étudier. Comme première étape, on impose que soit $f(\{x = 0\}) = \{x = y = 0\}$, soit $f(\{x = 0\}) = 0$. Considérons la situation où $f(\{x = 0\}) = 0$ et df_0 admet une valeur propre différente de 0 de vecteur propre transverse à $\{x = 0\}$. Dans ce cas, et par les résultats de [Rug13b], on peut écrire f sous la forme

$$f(x, y, z) = \big(\lambda x, x^a g(x, y, z) + p(x), x^b h(x, y, z) + q(x)\big),$$

avec $g(0, y, z) \not\equiv 0$, $h(0, y, z) \not\equiv 0$.

La première question que je me pose, en similitude avec les résultats de [Rug13b], est la suivante.

Question. *Sous quelles conditions le germe f comme ci-dessus est conjugué à une application de la forme :*

$$\widetilde{f}(x, y, z) = \big(\lambda x, x^{\widetilde{a}}(\alpha y + \beta z) + \widetilde{p}(x), x^{\widetilde{b}}(\gamma y + \delta z) + \widetilde{q}(x)\big),$$

avec $\alpha\delta \neq \beta\gamma$?

Est-ce que on peut toujours se ramener à une telle forme normale à conjugaison birationnelle près ?

Une telle forme normale implique qu'il existe un feuilletage invariant donné par $\{x = \text{const}\}$; de plus, f agit par applications linéaires affines sur les feuilles.

D'abord, je montrerai que cette forme normale peut être atteinte quand la partie linéaire de $(y, z) \mapsto (g(0, y, z), h(0, y, z))$ est inversible.

Références

[Aba01] Marco Abate. The residual index and the dynamics of holomorphic maps tangent to the identity. *Duke Math. J.*, 107(1) :173–207, 2001.

[Aba09] Marco Abate, editor. *Local dynamics of singular holomorphic foliations.* Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa, 2009.

[Aba11] Marco Abate. Open problems in local discrete holomorphic dynamics. *Anal. Math. Phys.*, 1(4) :261–287, 2011.

[ABT04] Marco Abate, Filippo Bracci, and Francesca Tovena. Index theorems for holomorphic self-maps. *Ann. of Math. (2)*, 159(2) :819–864, 2004.

[AKMW02] Dan Abramovich, Kalle Karu, Kenji Matsuki, and Jarosław Włodarczyk. Torification and factorization of birational maps. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(3) :531–572 (electronic), 2002.

[Bat13] Laurent Battisti. Lvmb manifolds and quotients of toric varieties. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1206.7073`, 2013.

[Bed91] Eric Bedford. Iteration of polynomial automorphisms of $\mathbf{C}^2$. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I, II (Kyoto, 1990)*, pages 847–858, Tokyo, 1991. Math. Soc. Japan.

[BEK] Xavier Buff, Adam Epstein, and Sarah Koch. Böttcher coordinates. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1104.2981`.

[Ber06] François Berteloot. Méthodes de changement d'échelles en analyse complexe. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 15(3) :427–483, 2006.

[BLS93] Eric Bedford, Mikhail Lyubich, and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$. IV. The measure of maximal entropy and laminar currents. *Invent. Math.*, 112(1) :77–125, 1993.

[Bon02] Laurent Bonavero. Factorisation faible des applications birationnelles (d'après Abramovich, Karu, Matsuki, Włodarczyk et Morelli). *Astérisque*, (282) :Exp. No. 880, vii, 1–37, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[Bos01] Frédéric Bosio. Variétés complexes compactes : une généralisation de la construction de Meersseman et López de Medrano-Verjovsky. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(5) :1259–1297, 2001.

[BS91] Eric Bedford and John Smillie. Polynomial diffeomorphisms of $\mathbf{C}^2$: currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.*, 103(1) :69–99, 1991.

[BSU12] Eric Bedford, John Smillie, and Tetsuo Ueda. Parabolic bifurcations in complex dimension 2. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1208.2577`, 2012.

[DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6) :1135–1169, 2001.

[DH84] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie I*, volume 84 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1984.

[DH85] A. Douady and J. H. Hubbard. *Étude dynamique des polynômes complexes. Partie II*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985.

[Dlo84] Georges Dloussky. Structure des surfaces de Kato. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (14) :ii+120, 1984.

[DO99] G. Dloussky and K. Oeljeklaus. Vector fields and foliations on compact surfaces of class VII_0. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 49(5) :1503–1545, 1999.

[Dol75] I. V. Dolgačev. Automorphic forms, and quasihomogeneous singularities. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 9(2) :67–68, 1975.

[DOT01] Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus, and Matei Toma. Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs. II. *Comment. Math. Helv.*, 76(4) :640–664, 2001.

[DOT03] Georges Dloussky, Karl Oeljeklaus, and Matei Toma. Class VII_0 surfaces with b_2 curves. *Tohoku Math. J. (2)*, 55(2) :283–309, 2003.

[Éca85] Jean Écalle. *Les fonctions résurgentes. Tome III*, volume 85 of *Publications Mathématiques d'Orsay [Mathematical Publications of Orsay]*. Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Orsay, 1985. L'équation du pont et la classification analytique des objects locaux. [The bridge equation and analytic classification of local objects].

[Fav00] Charles Favre. Classification of 2-dimensional contracting rigid germs and Kato surfaces. I. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(5) :475–514, 2000.

[Fav10] Charles Favre. Holomorphic self-maps of singular rational surfaces. *Publ. Mat.*, 54(2) :389–432, 2010.

[FJ04] Charles Favre and Mattias Jonsson. *The valuative tree*, volume 1853 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[FJ07] Charles Favre and Mattias Jonsson. Eigenvaluations. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 40(2) :309–349, 2007.

[FJ11] Charles Favre and Mattias Jonsson. Dynamical compactifications of $\mathbf{C}^2$. *Ann. of Math. (2)*, 173(1) :211–248, 2011.

[FM89] Shmuel Friedland and John Milnor. Dynamical properties of plane polynomial automorphisms. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 9(1) :67–99, 1989.

[FR13] Charles Favre and Matteo Ruggiero. Normal surface singularities admitting contracting automorphisms. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1302.6319`, 2013.

[FS92] John Erik Fornæss and Nessim Sibony. Complex Hénon mappings in $\mathbf{C}^2$ and Fatou-Bieberbach domains. *Duke Math. J.*, 65(2) :345–380, 1992.

[FS95] John Erik Fornaess and Nessim Sibony. Complex dynamics in higher dimension. II. In *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, volume 137 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 135–182. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1995.

[GR13] William Gignac and Matteo Ruggiero. Growth of attraction rates for iterates of a superattracting germ in dimension two. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1209.3450`, 2013.

[Gra62] Hans Grauert. Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.*, 146 :331–368, 1962.

[Hak98] Monique Hakim. Analytic transformations of $(\mathbf{C}^p, 0)$ tangent to the identity. *Duke Math. J.*, 92(2) :403–428, 1998.

[HOV94] John H. Hubbard and Ralph W. Oberste-Vorth. Hénon mappings in the complex domain. I. The global topology of dynamical space. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (79) :5–46, 1994.

[HP94] John H. Hubbard and Peter Papadopol. Superattractive fixed points in $\mathbf{C}^n$. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(1) :321–365, 1994.

[HPV00] John Hubbard, Peter Papadopol, and Vladimir Veselov. A compactification of Hénon mappings in $\mathbf{C}^2$ as dynamical systems. *Acta Math.*, 184(2) :203–270, 2000.

[HY83] M. Herman and J.-C. Yoccoz. Generalizations of some theorems of small divisors to non-Archimedean fields. In *Geometric dynamics (Rio de Janeiro, 1981)*, volume 1007 of *Lecture Notes in Math.*, pages 408–447. Springer, Berlin, 1983.

[Kat78] Masahide Kato. Compact complex manifolds containing "global" spherical shells. I. In *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto Univ., Kyoto, 1977)*, pages 45–84, Tokyo, 1978. Kinokuniya Book Store.

[Kat79a] Masahide Kato. Compact complex surfaces containing global strongly pseudoconvex hypersurfaces. *Tôhoku Math. J. (2)*, 31(4) :537–547, 1979.

[Kat79b] Masahide Kato. Some remarks on subvarieties of Hopf manifolds. *Tokyo J. Math.*, 2(1) :47–61, 1979.

[Mee00] Laurent Meersseman. A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension. *Math. Ann.*, 317(1) :79–115, 2000.

[Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.

[MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4) :469–523, 1980.

[Mül87] Gerd Müller. Actions of complex Lie groups on analytic **C**-algebras. *Monatsh. Math.*, 103(3) :221–231, 1987.

[Nak84] Iku Nakamura. On surfaces of class VII_0 with curves. *Invent. Math.*, 78(3) :393–443, 1984.

[OR06] Karl Oeljeklaus and Julie Renaud. Compact complex threefolds of class L associated to polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^3$. *Publ. Mat.*, 50(2) :401–411, 2006.

[OT05] Karl Oeljeklaus and Matei Toma. Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(1) :161–171, 2005.

[OW71] Peter Orlik and Philip Wagreich. Isolated singularities of algebraic surfaces with C^* action. *Ann. of Math. (2)*, 93 :205–228, 1971.

[Pin77] H. Pinkham. Normal surface singularities with C^* action. *Math. Ann.*, 227(2) :183–193, 1977.

[PMY94] Ricardo Pérez Marco and Jean-Christophe Yoccoz. Germes de feuilletages holomorphes à holonomie prescrite. *Astérisque*, (222) :7, 345–371, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).

[RR88] Jean-Pierre Rosay and Walter Rudin. Holomorphic maps from $\mathbf{C}^n$ to $\mathbf{C}^n$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 310(1) :47–86, 1988.

[Rug09] Matteo Ruggiero. Dynamics of foliations in the Siegel domain. In Marco Abate, editor, *Local dynamics of singular holomorphic foliations*, pages 81–113. Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali, Pisa, 2009.

[Rug11] Matteo Ruggiero. *The valuative tree, rigid germs and Kato varieties.* PhD thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2011.

[Rug12] Matteo Ruggiero. Rigidification of holomorphic germs with noninvertible differential. *Michigan Math. J.*, 61(1) :161–185, 2012.

[Rug13a] Matteo Ruggiero. Classification of one dimensional superattracting germs in positive characteristic. Preprint, 2013.

[Rug13b] Matteo Ruggiero. Contracting rigid germs in higher dimensions. To appear in Annales de l'Institut Fourier, Volume 63 (2013). Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1109.6803`, 2013.

[San87] G. K. Sankaran. Higher-dimensional analogues of Inoue-Hirzebruch surfaces. *Math. Ann.*, 276(3) :515–528, 1987.

[Sei68] Abraham Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $A\,dy = B\,dx$. *Amer. J. Math.*, 90 :248–269, 1968.

[Sib99] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.

[Ste57] Shlomo Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré. *Amer. J. Math.*, 79 :809–824, 1957.

[Tel05] Andrei Teleman. Donaldson theory on non-Kählerian surfaces and class VII surfaces with $b_2 = 1$. *Invent. Math.*, 162(3) :493–521, 2005.

[Tel10] Andrei Teleman. Instantons and curves on class VII surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 172(3) :1749–1804, 2010.

[Tom08] Matei Toma. On the Kähler rank of compact complex surfaces. *Bull. Soc. Math. France*, 136(2) :243–260, 2008.

[Ued86] Tetsuo Ueda. Local structure of analytic transformations of two complex variables. I. *J. Math. Kyoto Univ.*, 26(2) :233–261, 1986.

[Ued91] Tetsuo Ueda. Local structure of analytic transformations of two complex variables. II. *J. Math. Kyoto Univ.*, 31(3) :695–711, 1991.

[Ver13] Sima Verbitsky. Curves on oeljeklaus-toma manifolds. Preprint available at `http://arxiv.org/abs/1111.3828`, 2013.

[Wah90] Jonathan Wahl. A characteristic number for links of surface singularities. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(3) :625–637, 1990.