

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

TESI DI LAUREA

21 Luglio 2005

Struttura dell'insieme di Julia per polinomi

Candidato

Matteo Ruggiero

Relatore

Prof. Marco Abate

Università di Pisa

Controrelatore

Prof. Stefano Marmi

Università di Pisa

ANNO ACCADEMICO 2004/2005

Indice

Introduzione	i
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Superfici di Riemann	1
1.2 Metrica di Poincaré	4
1.3 Famiglie normali di funzioni	7
2 L'insieme di Julia	9
2.1 Definizione e prime proprietà	9
2.2 Dinamica locale	12
2.3 Proprietà globali	15
3 Connessione	21
3.1 Punti superattrattivi	21
3.2 Connessione dell'insieme di Julia per polinomi	26
4 Connessione locale	31
4.1 Teoria di Carathéodory	31
4.2 Connessione locale dell'insieme di Julia per polinomi	31
5 Lemma della chiocciola e sue conseguenze	35
5.1 Lemma della chiocciola	35
5.2 Risultati conclusivi	37
Bibliografia	43

Introduzione

Un sistema dinamico è la schematizzazione di un ambiente che cambia nel tempo: ad esempio si potrebbe voler studiare il movimento di un liquido all'interno di un frullatore in azione, o piuttosto dove andrà a sbattere una pallina lanciata in una certa direzione in un biliardo. Nella schematizzazione matematica, il tempo può essere considerato come continuo (e la scala dei tempi sarà \mathbb{R}) o discreto (e la scala dei tempi sarà \mathbb{Z}): dei due esempi precedenti il primo si presta più ad essere modellizzato tramite un sistema dinamico continuo, il secondo invece discreto (considerando solo i punti del bordo del biliardo dove va a sbattere la pallina). Una volta deciso un ambiente da studiare (ad esempio il liquido nel frullatore), il sistema dinamico è determinato una volta che si definisce la legge con cui questo ambiente cambia nel tempo (ad esempio la forza che le pale del frullatore imprimono sulle molecole del liquido), mentre lo scopo è determinare come si evolve l'ambiente sotto l'azione di questa legge.

Noi tratteremo sistemi dinamici nel campo della dinamica olomorfa discreta. In particolare considereremo come ambiente la sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, come scala dei tempi \mathbb{N} o \mathbb{Z} , e come legge di cambiamento una funzione olomorfa $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$. Quindi, dopo una prima parte in cui introdurremo alcuni strumenti matematici che ci saranno utili nel resto della trattazione, definiremo il concetto di orbita di un punto sotto l'azione di f , e quello di comportamento regolare e caotico di un'orbita. La nostra attenzione sarà allora rivolta alla struttura del luogo dei punti che hanno un'orbita caotica, che chiameremo insieme di Julia della relativa legge f .

Vedremo alcune proprietà dell'insieme di Julia nel caso di una qualsiasi funzione olomorfa, facendo particolare attenzione al comportamento locale. Importante sarà infatti lo studio della dinamica attorno ai punti fissi e periodici per f . Classificheremo i vari tipi di situazione che si possono incontrare a seconda del valore che la derivata prima di f assume nel punto fisso, vedendo in quali casi si ha un comportamento regolare, e in quali un comportamento caotico delle orbite.

In particolare sarà importante lo studio dei punti fissi superattrattivi, ovvero dove la derivata prima di f si annulla: in questo caso riusciremo a definire in un intorno del punto fisso una funzione, la mappa di Böttcher, che trasforma (nel senso del coniugio) la f in una funzione più semplice $g : w \mapsto w^n$ (per un n opportuno).

In pratica, se z_0 è tale che $f(z_0) = z_0$ e $f'(z_0) = 0$, troveremo una $\phi : U \rightarrow V$ tale che

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g ,$$

con U e V intorno opportuni di z_0 e 0 rispettivamente.

A questo punto si lascerà la generalità delle funzioni razionali per studiare i polinomi. I polinomi di grado maggiore o uguale a 2 possiedono un punto fisso superattrattivo all'infinito, quindi potremo usare i risultati dimostrati in generale per le funzioni razionali. Riusciremo così a dare un criterio (abbastanza semplice da applicare) per la connessione degli insiemi di Julia, mostrando che l'insieme di Julia di un polinomio può essere connesso, o avere un'infinità non numerabile di componenti connesse.

Nel caso di connessione dell'insieme di Julia, la dimostrazione ci fornirà una applicazione, che continueremo a chiamare mappa di Böttcher (essendo un'estensione di quella definita prima), definita su tutto il bacino di attrazione all'infinito (ovvero il complementare dell'insieme dei punti ad orbita limitata, che chiameremo insieme di Julia pieno). Da questa riusciremo a definire nuovi oggetti (potenziale di Green, raggi esterni) che saranno fondamentali per andare avanti. Infatti grazie ai raggi esterni, riusciremo ad escludere alcuni comportamenti caotici delle orbite: dimostreremo in particolare che se l'insieme di Julia, oltre ad essere connesso, è anche localmente connesso, allora potremo escludere l'esistenza di punti fissi (o periodici) di Cremer (dove la dinamica è molto caotica).

L'ipotesi aggiuntiva di connessione locale dell'insieme di Julia però non è di facile verifica: cercheremo quindi di trovare dei risultati analoghi senza questa ipotesi. Questo ci darà l'occasione di determinare meglio il comportamento intorno ai punti fissi dell'insieme di Julia. Riusciremo a mostrare così lo stesso risultato dimostrato prima con l'ipotesi di connessione locale, ma solo per un sottoinsieme denso dell'insieme di Julia e contemporaneamente a dare un criterio di natura combinatoria sul comportamento dei raggi esterni che approdano ad un certo punto fisso (o periodico).

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Superfici di Riemann

Quello che si farà in questa sezione è specificare l'ambiente e il tipo di funzioni di cui vogliamo studiare la dinamica. Partiamo dall'ambiente:

Definizione. Sia S un insieme. Una n -**carta** su S è una $\varphi : U \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}^n$, dove $U \subseteq S$, V è un aperto di \mathbb{C}^n e φ è bigettiva. Si denota con (U, φ) . Spesso si ometterà il valore di n , e si parlerà semplicemente di carte.

Definizione. Sia S un insieme e $s \in S$ un punto. Allora una carta (U, φ) si dice **centrata** in s se è una carta tale che $\varphi(s) = 0$.

Definizione. Due n -carte (U, φ) e (V, ψ) si dicono **compatibili** se vale una delle seguenti:

- $U \cap V = \emptyset$ (le carte parametrizzano parti diverse di S), oppure
- $U \cap V \neq \emptyset$, $\varphi(U \cap V)$ e $\psi(U \cap V)$ sono aperti di \mathbb{C}^n e $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ è un biolomorfismo (le carte parametrizzano una parte in comune di S nello stesso modo a meno di biolomorfismi).

Definizione. Un **atlante** su S è un insieme $\mathcal{A} = \{(U, \varphi)\}$ di n -carte a due a due compatibili che ricoprono S .

Definizione. Se \mathcal{A} è un atlante di n -carte su S , allora (S, \mathcal{A}) si dice **varietà analitica complessa** di dimensione (complessa) n .

Definizione. Una **superficie di Riemann** S è una varietà analitica complessa e connessa, di dimensione (complessa) $n = 1$.

Le superfici di Riemann saranno gli ambienti su cui studieremo la dinamica, mentre le funzioni che la determineranno saranno delle funzioni olomorfe. In particolare ci soffermeremo sulla sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, dove le funzioni olomorfe sono le funzioni razionali:

Definizione. Una funzione $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ si dice **razionale** se è della forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

con p e q polinomi in z .

Definizione. Sia $f(z) = p(z)/q(z)$ una funzione razionale, con p e q primi tra loro. Allora si dice **grado** il massimo tra i gradi di p e q :

$$\deg f = \max\{\deg(p), \deg(q)\}.$$

Incontreremo molto spesso in futuro i dischi nel piano complesso centrati nell'origine e di raggio r , tanto da meritarsi una notazione a parte:

Definizione. Denoteremo con \mathbb{D}_r il disco aperto centrato nell'origine e di raggio r :

$$\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}.$$

Inoltre nel caso di $r = 1$ scriveremo \mathbb{D} anziché \mathbb{D}_1 .

Un risultato fondamentale dell'analisi complessa sulla classificazione delle superfici di Riemann è il seguente teorema (confronta [F, Theorem 27.9]):

Teorema 1.1 (Teorema di uniformizzazione). *Ogni superficie di Riemann semplicemente connessa S è biolomorfa a una delle seguenti superfici modello:*

- la sfera di Riemann $\hat{\mathbb{C}}$;
- il piano complesso \mathbb{C} ;
- il disco unitario aperto \mathbb{D} .

Osservazione 1.2. Se T è una qualsiasi superficie di Riemann, e $\pi : S \rightarrow T$ è il rivestimento universale, allora S ha una struttura canonica di superficie di Riemann semplicemente connessa, e quindi per il teorema precedente S è biolomorfa a una delle tre superfici modello precedentemente descritte.

Definizione. Sia T una qualsiasi superficie di Riemann, e $\pi : S \rightarrow T$ il rivestimento universale. Allora T è detta:

- **sferica** se S è biolomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$;
- **euclidea** se S è biolomorfa a \mathbb{C} ;
- **iperbolica** se S è biolomorfa a \mathbb{D} .

Per fare un esempio, mostreremo un modello alternativo di superficie di Riemann semplicemente connessa e iperbolica, che ci sarà utile in seguito.

Proposizione 1.3. *Il semipiano $H = \{z = u + iv \in \mathbb{C} : u > 0\}$ è una superficie di Riemann (semplicemente connessa) iperbolica.*

Dimostrazione. Basta trovare un biolomorfismo $\chi : H \rightarrow \mathbb{D}$. Proviamo con:

$$\chi(z) = \frac{1-z}{1+z}. \quad (1.1)$$

Osserviamo che $\chi = \chi^{-1}$, e si vede immediatamente che sia χ sia χ^{-1} sono olo-morfe (il denominatore non si annulla mai nei rispettivi domini): quindi χ è un biolomorfismo. Calcoliamo allora $|\chi(z)|^2$ con $z = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$

$$|\chi(z)|^2 = \frac{(1-u-iv)(1-u+iv)}{(1+u+iv)(1+u-iv)} = \frac{(1-u)^2 + v^2}{(1+u)^2 + v^2}.$$

Se $z \neq -1$, allora si vede che

$$|\chi(z)| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(1-u)^2 + v^2}{(1+u)^2 + v^2} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1-u)^2 < (1+u)^2 \quad \Leftrightarrow \quad u > 0.$$

□

Consideriamo ora una superficie di Riemann T con rivestimento universale $\pi : S \rightarrow T$. Studiando allora la tipologia di quelle funzioni $\gamma : S \rightarrow S$ tali che $\gamma = \pi \circ \gamma$, si ottiene una migliore caratterizzazione delle superfici di Riemann di ognuno dei tre tipi a meno di isomorfismi. In particolare (vedi [M, pagine 14-15]):

Proposizione 1.4. *Sia T una superficie di Riemann qualsiasi. Allora:*

- T è sferica se e solo se T è isomorfa a $\hat{\mathbb{C}}$;
- T è euclidea se e solo se T è isomorfa a \mathbb{C} , al cilindro o ad un toro;
- T è iperbolica altrimenti.

Studiamo meglio il caso del disco \mathbb{D} , esponendo un risultato classico dell'analisi complessa:

Teorema 1.5 (Lemma di Schwartz). *Sia $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ una funzione olo-morfa con punto fisso $0 = f(0)$. Allora $|f'(0)| \leq 1$. Si possono avere due casi:*

- $|f'(0)| = 1$, e allora f è una rotazione: $f(z) = cz$ con $c = f'(0) \in S^1 = \partial\mathbb{D}$;
- $|f'(0)| < 1$, e allora $|f(z)| < |z|$ per ogni $z \neq 0$.

In particolare f è un biolomorfismo del disco se e solo se $|f'(0)| = 1$.

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che la funzione $g(z) = f(z)/z$ è ben definita e olomorfa su tutto il disco aperto \mathbb{D} : l'unico problema potrebbe essere $z = 0$. Per la condizione $f(0) = 0$ possiamo scrivere $f(z) = a_1z + a_2z^2 + \dots$; allora $g(z) = a_1 + a_2z + a_3z^2 + \dots$ è olomorfa anche in $z = 0$. Inoltre per g si ha che:

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{|z|},$$

e quindi per il principio del massimo $|g(z)| < 1/r$ per $|z| < r$. Mandando al limite $r \rightarrow 1$ si ottiene quindi $|g(z)| \leq 1$ per $z \in \mathbb{D}$. Se vale l'uguaglianza per un qualsiasi $z \in \mathbb{D}$, ancora per il principio del massimo dev'essere $g(z) = c$, con c un'opportuna costante di modulo unitario, e quindi $f(z) = z \cdot g(z) = cz$. Se invece non vale mai l'uguaglianza si ha $|g(z)| < 1$ per ogni $z \in \mathbb{D}$; ne segue che se $z \neq 0$ allora $|f(z)| < |z|$, mentre per $z = 0$ si ha $|g(0)| = |f'(0)| < 1$.

Se $|f'(0)| = 1$, allora abbiamo visto che f è una rotazione, e quindi un biolomorfismo. Rimane da dimostrare l'implicazione inversa. Sia f un biolomorfismo, ossia invertibile con inversa f^{-1} olomorfa: allora anche f^{-1} soddisfa le ipotesi del lemma di Schwartz, e quindi dev'essere $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$. Ma $f^{-1} \circ f = id \Rightarrow 1 = (f^{-1} \circ f)'(0) = (f^{-1})'(0) \cdot f'(0)$. Ricordando che $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$ e $|f'(0)| \leq 1$, si ha quindi $|(f^{-1})'(0)| = |f'(0)| = 1$, che è quello che volevamo dimostrare. \square

Prima di passare al prossimo argomento, enunciamo altri risultati classici dell'analisi complessa. Il primo riguarda le successioni di funzioni olomorfe (confronta [N, pagina 33], o ancora [M, Theorem 1.4]):

Teorema 1.6 (Teorema di Weierstrass). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un aperto. Se una successione di funzioni olomorfe $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ converge uniformemente sui compatti a una funzione limite f , allora anche f è olomorfa. Inoltre anche la successione delle derivate f'_n converge uniformemente sui compatti a f' .*

Il secondo è invece un utile teorema di confronto per il conteggio degli zeri di una funzione olomorfa (confronta [N, pagina 106]):

Teorema 1.7 (Teorema di Rouché). *Sia U un aperto di \mathbb{C} e K un compatto di U . Siano poi f e g due funzioni olomorfe tali che $|g(z)| < |f(z)|$ per ogni $z \in \partial K$. Allora f e $f + g$ hanno lo stesso numero di zeri in K (contati con molteplicità).*

1.2 Metrica di Poincaré

Lo scopo di questa sezione è mostrare come su ogni superficie di Riemann iperbolica S si possa porre una metrica Riemanniana speciale, tale per cui ogni biolomorfismo da S in sé (che chiameremo **automorfismo**) risulti essere un'isometria.

Partiamo dal caso un po' più semplice del disco unitario \mathbb{D} . Per questo scopo ci sarà utile una classificazione degli automorfismi di \mathbb{D} :

Proposizione 1.8. *Gli automorfismi di \mathbb{D} sono tutti e soli quelli della forma*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad (1.2)$$

con a che varia in \mathbb{D} e $e^{i\theta}$ in $\partial\mathbb{D}$ è di modulo unitario.

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che le funzioni f della forma (1.2) sono automorfismi di \mathbb{D} . Si vede subito che se a e z variano in \mathbb{D} , il denominatore della f non si annulla mai, e quindi f è olomorfa. Vediamo qual è l'immagine di f :

$$\begin{aligned} 1 - f(z)\overline{f(z)} &= 1 - \frac{(z - a)(\bar{z} - \bar{a})}{(1 - \bar{a}z)(1 - a\bar{z})} = \frac{1 - \bar{a}z - a\bar{z} + a\bar{a}z\bar{z} - z\bar{z} + a\bar{z} + \bar{a}z - a\bar{a}}{|1 - \bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 - z\bar{z} - a\bar{a} + a\bar{a}z\bar{z}}{|1 - \bar{a}z|^2} = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |a|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2} > 0 \end{aligned}$$

se a e z variano in \mathbb{D} , e quindi $|f(z)| < 1$, e $\text{Im}f \subseteq \mathbb{D}$. Inoltre notiamo che l'inversa di f è la funzione

$$g(z) = e^{-i\theta} \frac{z - b}{1 - \bar{b}z},$$

con $b = -ae^{i\theta}$; quindi g è della stessa forma di f , e questo ci dice che è olomorfa (e quindi f è un biolomorfismo con l'immagine), e che $\mathbb{D} \subseteq \text{Im}f$: infatti se $z_0 \in \mathbb{D}$, allora $g(z_0) \in \mathbb{D}$ è tale che $f(g(z_0)) = z_0$, e quindi $z_0 \in \text{Im}f$.

Abbiamo quindi visto che le f della forma (1.2) sono automorfismi di \mathbb{D} . Sia ora h un qualsiasi automorfismo di \mathbb{D} , e sia $a = h(0)$. Allora $f(z) = (z - a)/(1 - \bar{a}z)$ è tale che $f(a) = 0$. Quindi $f \circ h$ è un automorfismo di \mathbb{D} con un punto fisso in 0: per il Teorema 1.5 (Lemma di Schwartz) $f \circ h$ è una rotazione di un angolo θ :

$$f(h(z)) = e^{i\theta} z \Leftrightarrow h(z) = f^{-1}(e^{i\theta} z) = \frac{e^{i\theta} z + a}{1 + \bar{a}e^{i\theta} z} = e^{i\theta} \frac{z + e^{-i\theta} a}{1 + \bar{a}e^{i\theta} z},$$

e quindi h è della forma (1.2). □

Osservazione 1.9. La proposizione precedente ci dice allora che per qualunque $p \in \mathbb{D}$ esiste un biolomorfismo f che manda p in 0, unico a meno di rotazioni.

Teorema 1.10. *Esiste una metrica Riemanniana sul disco \mathbb{D} invariante per gli automorfismi di \mathbb{D} , unica a meno di moltiplicazione per una costante positiva.*

Dimostrazione. Supponiamo che una tale metrica g esista: allora ogni automorfismo della forma (1.2) deve essere un'isometria per g , ovvero $f^*g = g$, con f^*g il pullback di g tramite l'automorfismo f . In particolare se $f(z) = (z - p)/(1 - \bar{p}z)$ allora deve essere

$$\langle v, w \rangle_p = f^*g_p(v, w) := \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_0, \quad (1.3)$$

e quindi la g risulta definita su tutto \mathbb{D} una volta definita in 0. Ma un prodotto hermitiano in uno spazio vettoriale di dimensione 1 è unico a meno di moltiplicazione per uno scalare positivo, e da ciò segue che la metrica cercata (se esiste) è unica a meno di moltiplicazione per uno scalare positivo.

Sfruttiamo ora la (1.3) come definizione, ponendo $\langle \cdot, \cdot \rangle_0 = \langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto hermitiano euclideo su $T_0\mathbb{D}$, e verifichiamo che la g risulta essere una metrica Riemanniana del tipo cercato. Vediamo innanzitutto che la definizione è ben posta: se h è un altro automorfismo di \mathbb{D} tale che $h(p) = 0$, allora per la Proposizione 1.8 $h = \lambda f$ con $|\lambda| = 1$. Da questo segue che $dh_p = \lambda df_p$, e quindi $\langle dh_p(v), dh_p(w) \rangle_0 = \lambda \bar{\lambda} \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_0$. Ma $\lambda \bar{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$, e la definizione (1.3) è ben posta.

Mostriamo ora che la g così definita è in effetti una metrica Riemanniana: l'unica cosa non ancora verificata è la dipendenza C^∞ di g_p da p . Se f è della forma (1.2), con $\theta = 0$, facendo un calcolo esplicito si ottiene:

$$df_p(v) = \left. \frac{d}{dt} f(p + tv) \right|_{t=0} = \frac{v}{1 - |p|^2};$$

quindi la metrica g è data da

$$g_p(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{(1 - |p|^2)^2}, \quad (1.4)$$

e risulta in effetti una metrica Riemanniana. Per come è stata costruita, questa metrica è tale che ogni automorfismo di \mathbb{D} è un'isometria, ed è quindi la metrica cercata. \square

Definizione. Una **metrica di Poincaré** su una superficie iperbolica S è una metrica Riemanniana tale per cui ogni automorfismo di S sia un'isometria per questa metrica.

Osservazione 1.11. La metrica di Poincaré ha la proprietà di essere a curvatura di Gauss costante (negativa). Di solito per definire la metrica di Poincaré di una certa superficie di Riemann iperbolica, si sceglie quella a curvatura di Gauss costante -4 , come quelle date da (1.4) e (1.5).

Osservazione 1.12. In generale, se S è una superficie di Riemann iperbolica e semplicemente connessa, e se $f : S \rightarrow \mathbb{D}$ è un biolomorfismo, dato ad esempio dal Teorema 1.1 (Teorema di uniformizzazione), allora il pullback della metrica di Poincaré di \mathbb{D} è una metrica invariante per gli automorfismi di S .

Se poi T è una qualsiasi superficie di Riemann iperbolica, e $\pi : \mathbb{D} \rightarrow T$ è il rivestimento universale, allora esiste una (unica) struttura di varietà analitica su \mathbb{D} che renda π un rivestimento olomorfo. In generale se abbiamo una metrica Riemanniana su \mathbb{D} , non è detto che si riesca a definire poi una metrica su T che renda il rivestimento olomorfo una isometria; con la metrica di Poincaré però vi si riesce perché questa metrica è tale che gli automorfismi di \mathbb{D} (e quindi gli automorfismi del rivestimento), sono delle isometrie. Quindi le metriche di Poincaré esistono su ogni superficie di Riemann iperbolica.

Proposizione 1.13. *La metrica di Poincaré su H l'iperpiano definito nella Proposizione 1.3 è data da*

$$g_z(v, w) = \frac{\langle v, w \rangle}{4u^2}, \quad (1.5)$$

con $z = u + iv$.

Dimostrazione. Tenendo presente l'Osservazione precedente, se χ è dato dalla (1.1), allora $g_z(v, w) = \langle df_p(v), df_p(w) \rangle_{\chi(z)}$, con $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ la metrica di Poincaré di \mathbb{D} data dalla (1.4). La tesi segue quindi dal calcolo diretto. \square

Infine diamo un enunciato sul comportamento della metrica di Poincaré sul bordo (confronta [M, Theorem 3.4]), che ci sarà utile per alcuni risultati finali:

Teorema 1.14. *Siano $S \subset T$ due superfici di Riemann, con S iperbolica, e sia p_n una successione di punti in S che converge (rispetto alla topologia di T) a un punto $p \in \partial S \subset T$. Fissato un $r > 0$, consideriamo i dischi aperti $N_r(p_n)$ di raggio r (rispetto alla metrica di Poincaré su S). Allora, scegliendo una metrica che sia compatibile con la topologia di T , si ha che il diametro di $N_r(p_n)$ secondo questa seconda metrica converge a zero per $n \rightarrow \infty$.*

1.3 Famiglie normali di funzioni

In questa sezione daremo le nozioni di topologia compatta-aperta e di famiglia normale di funzioni che ci saranno molto utili in futuro. Introduciamo il primo concetto in generale per spazi topologici.

Definizione. Siano X e Y due spazi topologici, e $\mathcal{C}(X, Y)$ l'insieme delle funzioni continue $f : X \rightarrow Y$. Consideriamo gli insiemi della forma

$$N_{K,A} = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) : f(K) \subseteq A\}$$

al variare di K tra i compatti di X e A tra gli aperti di Y . Questi insiemi generano una topologia su $\mathcal{C}(X, Y)$, detta **topologia compatta-aperta**.

Definizione. Se Y ammette una distanza d , allora possiamo definire una distanza d^* su $\mathcal{C}(X, Y)$:

$$d_i^*(f, g) = \sup_{x \in K_i} d(f(x), g(x)), \quad d^*(f, g) = \sum_i 2^{-i} d_i^*(f, g),$$

con $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di compatti che invade X .

d^* è detta **distanza uniforme**. Questa distanza induce una topologia su $\mathcal{C}(X, Y)$, detta **topologia della convergenza uniforme sui compatti**.

Osservazione 1.15. Se Y ammette una distanza d , allora la topologia compatta-aperta (dove si considera Y con la topologia indotta dalla metrica) è la topologia della convergenza uniforme sui compatti.

Definizione. Siano S e T due superfici di Riemann, $\mathcal{C}(S, T)$ lo spazio delle funzioni continue da S a T e $\text{Hol}(S, T)$ il sottospazio delle funzioni olomorfe. Diremo **topologia compatta-aperta** su $\text{Hol}(S, T)$ la topologia indotta dalla topologia compatta-aperta su $\mathcal{C}(S, T)$.

D'ora in poi considereremo sempre $\text{Hol}(S, T)$ con relativa topologia compatta-aperta.

Definizione. Siano S e T due superfici di Riemann. Una successione di funzioni olomorfe $f_n : S \rightarrow T$ **diverge a infinito uniformemente** se per ogni compatto $K \subseteq S$ e per ogni compatto $H \subseteq T$ esiste un n_0 tale che $f_n(K) \cap H = \emptyset$ per ogni $n \geq n_0$.

Definizione. Siano S e T due superfici di Riemann. Una famiglia di funzioni olomorfe $\mathcal{F} \subseteq \text{Hol}(S, T)$ è detta una **famiglia normale** se per ogni successione di \mathcal{F} esiste una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti di S , o che diverge uniformemente a infinito.

Osservazione 1.16. Nel caso di T compatta, nessuna successione può divergere uniformemente ad infinito, quindi la condizione di normalità per una famiglia \mathcal{F} di funzioni olomorfe si traduce nel chiedere che $\overline{\mathcal{F}} \subset \text{Hol}(S, T)$ sia un compatto.

Enunciamo ora uno dei risultati più importanti sullo studio delle famiglie normali (confronta [M, Theorem 3.7], o ancora [N, pagina 96]):

Teorema 1.17 (Teorema di Montel). *Sia S una superficie di Riemann, e \mathcal{F} una famiglia di funzioni olomorfe $f : S \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ che omette almeno tre punti (ovvero esistono a, b, c punti di $\hat{\mathbb{C}}$ tali che $f(S) \subseteq \hat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$ per ogni $f \in \mathcal{F}$). Allora \mathcal{F} è una famiglia normale.*

Capitolo 2

L'insieme di Julia

2.1 Definizione e prime proprietà

Ciò che vogliamo studiare di un sistema dinamico è come si evolve l'ambiente nel tempo, e determinare le traiettorie di ogni punto. Quando il tempo è discreto, il concetto di traiettoria si traduce in quello di orbita.

Definizione. Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione olomorfa, e z un punto di $\hat{\mathbb{C}}$. Si dice **orbita** di z (tramite f) la successione $\{f^{on}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Distingueremo allora due tipi di punti: quelli che hanno un'orbita regolare (l'insieme di questi punti sarà l'insieme di Fatou), e quelli che hanno un'orbita caotica (che corrispondono invece all'insieme di Julia). Nella storia della dinamica olomorfa è risultato vincente il seguente approccio:

Definizione. Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione olomorfa (non costante) a valori nella sfera di Riemann. Diremo che $z \in \hat{\mathbb{C}}$ appartiene all'**insieme di Fatou** di f , che denoteremo con $\text{Fatou}(f)$, se esiste un intorno aperto U di z in $\hat{\mathbb{C}}$ tale che la famiglia $\mathcal{F} = \{f|_U^{on} \mid n \in \mathbb{N}\}$ delle iterate di f sia normale. Il complementare dell'insieme di Fatou si dirà **insieme di Julia** di f , e si denoterà con $J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \text{Fatou}(f)$.

Osservazione 2.1. L'insieme di Fatou di una funzione olomorfa è un'aperto di $\hat{\mathbb{C}}$ (e quindi $J(f)$ è un chiuso): infatti se $z \in \text{Fatou}(f)$ allora esiste un aperto U intorno di z tale per cui $\mathcal{F} = \{f|_U^{on} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia normale. Allora lo stesso aperto U va bene considerato come intorno di un qualsiasi suo punto, e quindi vale che $U \subset \text{Fatou}(f)$.

Osservazione 2.2. Siccome $\hat{\mathbb{C}}$ è una superficie di Riemann compatta, la condizione di normalità appena data si traduce nel chiedere che ogni successione in \mathcal{F} ammetta una sottosuccessione convergente ad una funzione \tilde{f} in maniera uniforme sui compatti di U (vedi l'Osservazione 1.16). Inoltre per il Teorema 1.6 (Teorema di Weierstrass) \tilde{f} è necessariamente una funzione olomorfa.

Studiamo ora un caso semplice per prendere familiarità con queste definizioni.

Esempio 2.3. Consideriamo la funzione $f(z) = z^2$. Come agisce f sui complessi?

- Se $|z| < 1$ allora $|f(z)| = |z^2| < |z|$: applicando ripetutamente f si vede che l'orbita di z converge a 0.
- Se $|z| > 1$ allora $|f(z)| = |z^2| > |z|$: applicando ripetutamente f l'orbita di z converge a ∞ .
- Se $z \in \partial\mathbb{D}$ allora anche $f(z) \in \partial\mathbb{D}$: l'orbita di z rimane quindi confinata in $\partial\mathbb{D}$.

In particolare se $|z| < 1$, allora la successione $\{f|_{\mathbb{D}}^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ (e quindi anche tutte le sue sottosuccessioni) converge uniformemente sui compatti di \mathbb{D} alla funzione costantemente nulla. Analogamente se $|z| > 1$, la successione $\{f|_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{D}}^{on}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente sui compatti di $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ alla funzione costante $z \mapsto \infty$. Quindi abbiamo appena visto che $\hat{\mathbb{C}} \setminus \partial\mathbb{D} \subseteq \text{Fatou}(f)$. Se invece $z \in \partial\mathbb{D}$ allora qualsiasi intorno U di z ha intersezione non vuota con \mathbb{D} e con $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Se esistesse una sottosuccessione di $(f|_U^{on})_{n \in \mathbb{N}}$ che converge uniformemente sui compatti di U a una certa g , allora dovrebbe valere $g(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{D} \cap U$ e $g(z) = \infty$ per ogni $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Ma questo è un assurdo, in quanto una funzione limite dovrebbe essere olomorfa (vedi l'Osservazione 2.2), mentre evidentemente g non lo è. Quindi $\partial\mathbb{D} \subseteq J(f)$. Mettendo infine insieme i due risultati si ottiene che $J(f) = \partial\mathbb{D}$.

Questo è uno dei pochi esempi di insiemi di Julia così semplici sia da determinare, sia come struttura. Generalmente non è così semplice disegnare gli insiemi di Julia: noi vedremo un modo relativamente semplice (anche dal punto di vista computazionale) per determinare gli insiemi di Julia di polinomi (vedi l'Osservazione ?? più avanti). Quelli più conosciuti hanno un aspetto molto affascinante, sono i famosi frattali. Ce ne possono essere di vario tipo, anche tra quelli associati ai soli polinomi: ad esempio ci sono delle curve di Jordan (vedi la Figura 2.1), o degli insiemi di Cantor (vedi la Figura 2.2).

Vediamo ora due proprietà molto importanti degli insiemi di Julia, che discendono (quasi) direttamente dalle definizioni date.

Proposizione 2.4. *L'insieme di Julia $J(f)$ è **totalmente invariante** sotto l'azione di f :*

$$z \in J(f) \iff f(z) \in J(f).$$

Dimostrazione. Basta dimostrare che l'insieme di Fatou è totalmente invariante per f . Se $z \in \text{Fatou}(f)$ allora per definizione esiste U intorno aperto di z tale che $\{f|_U^{on} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia una famiglia normale. Allora $f(U)$ è un aperto (f è olomorfa non

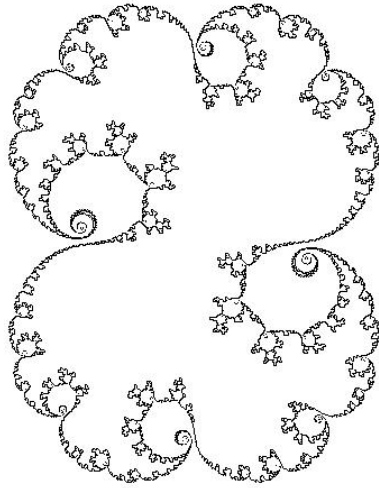


Figura 2.1: $J(f)$ per $f(z) = z^2 + (0.99 + 0.14i)z$

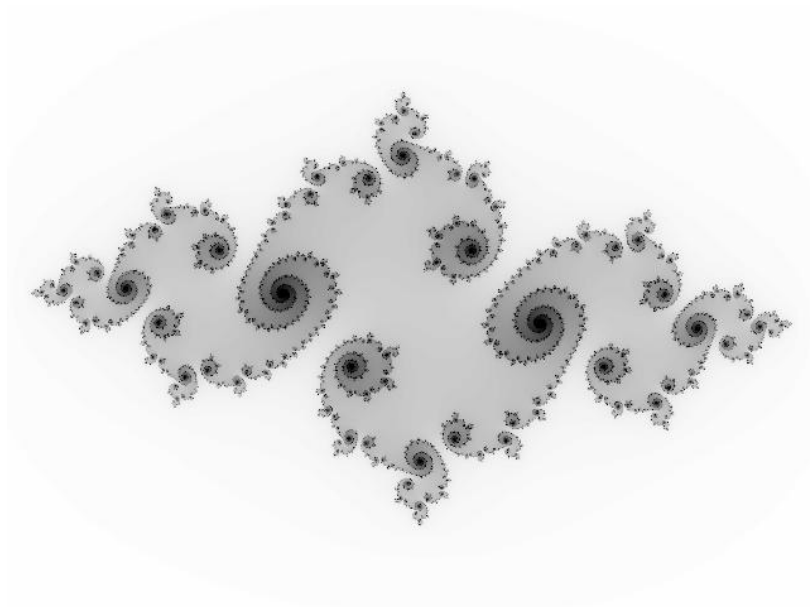


Figura 2.2: $J(f)$ per $f(z) = z^2 + (-0.765 + 0.12i)z$

costante, quindi aperta), intorno di $f(z)$ e tale che $\{f_{|f(U)}^{on} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f_{|U}^{o(n+1)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia normale (la sua chiusura è contenuta in un compatto, e quindi è a sua volta compatta); quindi anche $f(z) \in \text{Fatou}(f)$.

Viceversa se $f(z) \in \text{Fatou}(f)$ allora esiste V intorno aperto di $f(z)$ tale che $\{f_{|V}^{on} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia una famiglia normale. Quindi $U = f^{-1}(V)$ è un intorno aperto di z tale che $\{f_{|U}^{on} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{f_{|V}^{on} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup id$ è una famiglia normale (aggiungere una sola funzione non cambia la convergenza delle sottosuccessioni); quindi $z \in \text{Fatou}(f)$. \square

Proposizione 2.5. *L'insieme di Julia di una funzione olomorfa coincide con quello delle sue iterate:*

$$J(f) = J(f^{on}).$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato equivalente per l'insieme di Fatou:

$$\text{Fatou}(f) = \text{Fatou}(f^{on}).$$

Mostriamo la prima inclusione: sia $z \in \text{Fatou}(f)$. Per definizione esiste U intorno aperto di z tale che $K = \overline{\mathcal{F}}$ sia un compatto, con $\mathcal{F} = \{f_{|U}^{ok}\}$. Ma $\mathcal{F}_n = \{f_{|U}^{onk}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$, e quindi $\overline{\mathcal{F}_n} \subset K$ è un compatto, e $z \in \text{Fatou}(f^{on})$.

Vediamo ora l'inclusione opposta: sia $z \in \text{Fatou}(f^{on})$. Sempre per la definizione esiste un U intorno aperto di z tale che $\mathcal{F}_n = \{f_{|U}^{okn}\}$ sia una famiglia normale. Ma allora per ogni h tale che $0 < h < n$ anche $f^{oh} \circ \mathcal{F}_n = \{f_{|U}^{okn+h}\}$ è una famiglia normale. Infatti per ipotesi abbiamo che se $(g_k) \subset \mathcal{F}_n$ è una successione, allora esiste una sottosuccessione (g_{k_i}) che converge uniformemente sui compatti di U ad una certa funzione olomorfa g . Ogni successione di $f^{oh} \circ \mathcal{F}_n$ è della forma $(f^{oh} \circ g_k)$, e quindi ammette una sottosuccessione, $(f^{oh} \circ g_{k_i})$, che converge uniformemente sui compatti di U a $f^{oh} \circ g$. Ma $\mathcal{F} = \bigcup_{0 < h < n} (f^{oh} \circ \mathcal{F}_n)$, mentre $\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{0 < h < n} \overline{f^{oh} \circ \mathcal{F}_n}$, che è un compatto (perché unione finita di compatti), e quindi lo è a sua volta anche $\overline{\mathcal{F}}$ (perché chiuso in un compatto). \square

2.2 Dinamica locale

Per continuare lo studio dell'insieme di Julia, è interessante osservare il comportamento delle orbite attorno ai punti fissi, dove la situazione è un po' più semplice. Ricordiamo cosa sono punti fissi e periodici:

Definizione. z_0 è un **punto fisso** per una funzione f se $f(z_0) = z_0$. z_0 è invece detto **periodico** di periodo k se k è il minimo intero positivo tale che z_0 sia un punto fisso per f^{ok} , ovvero se $f^{ok}(z_0) = z_0$. z_0 è infine detto **preperiodico** se esiste h intero positivo tale che $f^{oh}(z_0)$ sia un punto periodico.

Osservazione 2.6. La Proposizione 2.5 sarà molto utile nello studio della dinamica locale: infatti ci permetterà in molti casi di estendere i risultati che dimostreremo per i punti fissi, agli analoghi risultati per i punti periodici. Basterà infatti considerare come funzione $f^{\circ k}$ anziché f .

Vedremo che il comportamento delle orbite attorno a un punto fisso (o periodico) verrà principalmente determinato dal moltiplicatore:

Definizione. Chiamiamo **moltiplicatore** di f in un punto fisso z_0 il valore $\lambda = f'(z_0)$. Se poi z_0 è un punto periodico di periodo k , chiamiamo sempre **moltiplicatore** di f nel punto periodico z_0 il moltiplicatore di $f^{\circ k}$ nel punto (fisso per $f^{\circ k}$) z_0 .

Classifichiamo allora i punti fissi (e periodici) a seconda del loro moltiplicatore.

Definizione. Sia z_0 un punto fisso (periodico) per f e λ il moltiplicatore di f in z_0 . A seconda del valore di λ , z_0 si dice:

- **attrattivo** se $\lambda < 1$;
- **repulsivo** se $\lambda > 1$;
- **indifferente** se $\lambda = 1$.

Inoltre z_0 si dice:

- **superattrattivo** se $\lambda = 0$;
- **parabolico** se λ è una radice dell'unità ma $f^{\circ k}$ è sempre diversa dall'identità;
- **irrazionale** se λ è della forma $e^{2\pi i\xi}$ con $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Nel caso di punti fissi (o periodici) attrattivi, è utile introdurre il bacino di attrazione.

Definizione. Sia z_0 un punto fisso attrattivo per f . Il **bacino di attrazione** di z_0 è l'insieme $A(z_0)$ dei punti z le cui orbite convergono a z_0 . Chiameremo poi **bacino immediato di attrazione** $A_0(z_0)$ la componente connessa di $A(z_0)$ che contiene z_0 .

Cominciamo allora a determinare il comportamento delle orbite attorno ai punti fissi (periodici) di vario tipo.

Proposizione 2.7. *Il bacino d'attrazione di qualsiasi punto fisso (periodico) attrattivo è contenuto nell'insieme di Fatou di f : $A(z_0) \subseteq \text{Fatou}(f)$.*

Dimostrazione. Se $\lambda = f'(z_0)$ è il moltiplicatore, l'ipotesi ci dice che $|\lambda| < 1$. Se c è tale che $|\lambda| < c < 1$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $|f(z) - z_0| < c|z - z_0|$ se $|z - z_0| < \varepsilon$. Iterando il procedimento si ha che $|f^{\circ n}(z) - z_0| < c^n|z - z_0|$. Essendo $c < 1$ si ottiene che le iterate di f ristrette a $U = D(z_0, \varepsilon)$ convergono uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto z_0$, e quindi $U \subseteq \text{Fatou}(f)$.

Se $z \in A(z_0)$, allora $f^{\circ n}(z) \in U$ per n abbastanza grande. Considerando allora $V = f^{\circ -n}(U)$, le iterate di f ristrette a V convergono uniformemente sui compatti alla funzione costante $z \mapsto z_0$, e quindi $A(z_0) \subseteq \text{Fatou}(f)$. Per passare al caso di un punto periodico, basta applicare l'Osservazione 2.6. \square

Proposizione 2.8. *I punti fissi (periodici) repulsivi di una funzione f appartengono all'insieme di Julia.*

Dimostrazione. Sia z_0 un punto fisso repulsivo, ovvero tale che il moltiplicatore $\lambda = f'(z_0)$ sia di modulo > 1 . Allora nessuna successione di iterate di f può convergere uniformemente in un intorno di z_0 : infatti la derivata prima di $f^{\circ n}$ calcolata in z_0 è λ^n , e il suo modulo tende a ∞ al crescere di n , mentre per il Teorema 1.6 (Teorema di Weierstrass) se una successione di funzioni olomorfe converge uniformemente sui compatti a una funzione g , allora anche la successione delle derivate converge uniformemente sui compatti a g' . In particolare non può mai valere ∞ . Per passare al caso di un punto periodico, basta applicare l'Osservazione 2.6. \square

Proposizione 2.9. *I punti fissi (periodici) parabolici di una funzione f appartengono all'insieme di Julia.*

Dimostrazione. Sia z_0 un punto fisso parabolico, per cui valga $\lambda^k = 1$ per un certo k , con λ il moltiplicatore in z_0 . Sia poi (U, φ) una carta centrata in z_0 . Si può scrivere $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) =: g(z) = \lambda z + a_r z^r + o(z^r)$, con $r \geq 2$ e $a_r \neq 0$. Allora $\varphi \circ f^{\circ k} \circ \varphi^{-1}(z) = g^{\circ k}(z) = z + a z^s + o(z^s)$, con opportuni $s \geq 2$ e $a \neq 0$ (perché $f^{\circ k}$ non è mai l'identità). Considerando le iterate m -esime, troviamo quindi $\varphi \circ f^{\circ mk} \circ \varphi^{-1}(z) = g^{\circ mk}(z) = z + m a z^s + o(z^s)$. Quindi la s -esima derivata di $f^{\circ mk}$ calcolata in $z = 0$ vale $mas!$, che tende a ∞ al crescere di m . Se per assurdo la successione $\{f^{\circ mk}\}$ convergesse uniformemente sui compatti di U a una funzione h , allora per il Teorema 1.6 (Teorema di Weierstrass) anche le derivate convergerebbero uniformemente sui compatti alle derivate di h : otteniamo quindi l'assurdo. Per passare al caso di un punto periodico, basta applicare l'Osservazione 2.6. \square

In questi tre casi si può descrivere molto meglio la dinamica, cercando di associare alla f una funzione più semplice, tramite il coniugio.

Definizione. Siano $f : U \rightarrow U$ e $g : V \rightarrow V$ due funzioni oloedriche definite in $U, V \subseteq \hat{\mathbb{C}}$. Si dice che f è **coniugata** a g (tramite ϕ) se esiste $\phi : U \rightarrow V$ biolomorfismo tale che $\phi \circ f \circ \phi^{-1} \equiv g$

Nel prossimo capitolo vedremo più in dettaglio il caso di un punto fisso superattrattivo. Ora invece mostriamo cosa succede nel caso di punti fissi irrazionali (confronta [M, Lemma 11.1]).

Proposizione 2.10. *Sia z_0 un punto fisso irrazionale di moltiplicatore λ . Allora localmente si possono avere due comportamenti:*

- *esiste una linearizzazione locale di f in z_0 , ovvero f (presa in un intorno di z_0) è coniugata alla funzione $w \mapsto \lambda \cdot w$ (in un intorno di 0). In tal caso il punto z_0 appartiene a $\text{Fatou}(f)$, e la componente connessa di $\text{Fatou}(f)$ che contiene z_0 è biolomorfa al disco unitario \mathbb{D} .*
- *non esiste una tale linearizzazione locale, e allora z_0 appartiene a $J(f)$.*

Definizione. Se siamo nel primo caso della proposizione precedente, z_0 è detto **punto di Siegel**, mentre la componente connessa di $\text{Fatou}(f)$ che contiene z_0 è detta **disco di Siegel**. Se siamo invece nel secondo caso, z_0 è detto **punto di Cremer**.

Osservazione 2.11. Ricapitolando, un punto fisso (periodico) z_0 appartiene a:

- $\text{Fatou}(f) \iff z_0$ è attrattivo o di Siegel.
- $J(f) \iff z_0$ è repulsivo, parabolico o di Cremer.

Nel caso di punti fissi irrazionali non è così semplice determinare in quale dei due casi ci si trovi. In effetti appena sorto il problema, alcune delle prime soluzioni proposte (negli anni '20) erano sbagliate. Bisogna aspettare il 1927, quando Hubert Cremer presenta un primo criterio di non linearizzazione, seguito poi nel 1942 da un criterio di linearizzazione dovuto a Carl Ludwig Siegel, e da altri successivamente. Tra i risultati che dimostreremo, riusciremo a ricavare anche informazioni in questo senso, trattando il caso di polinomi il cui insieme di Julia sia connesso; in particolare dimostreremo che se l'insieme di Julia di un polinomio è connesso e localmente connesso, allora non ci sono punti di Cremer.

2.3 Proprietà globali

Continuiamo ora lo studio degli insiemi di Julia, ancora nella generalità di funzioni razionali qualsiasi, escludendo casi di studio diretto come quelle di grado 1. Prima di tutto vediamo una proprietà della funzione grado.

Lemma 2.12. *La mappa $\deg : \text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{N}$ è continua. In particolare, se una successione di funzioni razionali f_n converge uniformemente su tutto $\hat{\mathbb{C}}$ a una funzione f , allora f è razionale e per n abbastanza grande $\deg(f_n) = \deg(f)$.*

Dimostrazione. Essendo $\text{Hol}(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathbb{C}})$ e \mathbb{N} due spazi metrici (con la norma uniforme il primo, con la distanza discreta o quella indotta da \mathbb{R} il secondo), basta verificare la continuità per le successioni convergenti. Supponiamo quindi che f_n sia una successione di funzioni razionali, convergente ad una certa f uniformemente su tutto $\hat{\mathbb{C}}$. Per il Teorema 1.6 (Teorema di Weierstrass) f è olomorfa su tutto $\hat{\mathbb{C}}$, e quindi razionale. Essendo \mathbb{N} formato da punti isolati, dobbiamo dimostrare che per n abbastanza grande $\deg(f_n) = \deg(f)$. Se f è costante, allora per la convergenza uniforme le f_n risultano non surgettive per un n abbastanza grande, e quindi costanti. Possiamo dunque supporre f non costante, ossia $\deg(f) \geq 1$.

Supponiamo inoltre che $f(\infty) \neq 0$: basta comporre f e f_n con un opportuno biolomorfismo di $\hat{\mathbb{C}}$. In questo caso abbiamo che f ha degli zeri distinti z_1, \dots, z_t che giacciono tutti in \mathbb{C} . Prendiamo intorno ad ogni zero z_j un disco D_j centrato in z_j e abbastanza piccolo da non contenere poli di f . Sia poi D l'unione di questi dischi e C il suo complementare. Siccome f_n converge ad f uniformemente, per n abbastanza grande D non contiene poli neanche per f_n , e quindi sia f_n sia f risultano olomorfe in $D \subset \mathbb{C}$. Inoltre sempre per la convergenza uniforme, possiamo considerare dei K_j compatti di D_j abbastanza grandi da contenere gli zeri di f e f_n per n abbastanza grande, e sia K la loro unione. f assumerà un certo minimo $m > 0$ su ∂K , mentre per la convergenza uniforme esiste un n abbastanza grande tale per cui $|f(z) - f_n(z)| < m$ per ogni z in $\hat{\mathbb{C}}$, e quindi in particolare in ∂K .

Applicando il Teorema 1.7 (Teorema di Rouché) a f e $f - f_n$, si ottiene che f_n e f hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità) in K , e quindi in D . Inoltre f (e quindi anche le f_n per n abbastanza grande) è lontano da zero nel compatto C . Quindi (per n abbastanza grande) f_n e f hanno lo stesso numero di zeri (contati con molteplicità).

Analogamente si dimostra che f_n e f hanno lo stesso numero di poli, basta considerare $1/f_n$ e $1/f$ anziché f_n e f e ripetere i passi precedenti. Questo ci dice infine che per n abbastanza grande f_n e f hanno lo stesso grado, che quindi risulta una funzione continua. \square

Possiamo ora dimostrare la seguente proposizione:

Proposizione 2.13. *Se f è una funzione razionale di grado $\deg(f) \geq 2$, allora l'insieme di Julia non è vuoto: $J(f) \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $J(f)$ sia vuoto. Quindi per ogni $z \in \hat{\mathbb{C}}$ esiste un intorno U tale per cui ogni successione di $\mathcal{F} = \{f^{on}\}$ ammetta una sottosuccessione convergente in modo uniforme sui compatti di U . Questi U formano un

ricoprimento di $\hat{\mathbb{C}}$: per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito U_j . Allora data una successione di \mathcal{F} , possiamo estrarre (induttivamente) una sottosuccessione che converga ad una certa g uniformemente sui compatti di ogni U_j , e quindi uniformemente su tutto $\hat{\mathbb{C}}$. Allora il Lemma 2.12 ci dice che per j abbastanza grande f^{on_j} e g sono razionali dello stesso grado. Ma $\deg(f^{on_j}) = (\deg f)^{n_j} \rightarrow \infty$, il che è assurdo. \square

Per continuare con le proprietà generali degli insiemi di Julia, dobbiamo prima dare un'altra definizione.

Definizione. Con **orbita completa** di un punto z sotto l'azione di $f : S \rightarrow S$ si intende l'insieme $go(z, f)$ dei punti w di S le cui orbite intersecano l'orbita di z tramite l'azione di f . Un punto z è detto a **orbita completa finita**, o **eccezionale**, se $go(z, f)$ è finito. Denoteremo l'insieme dei punti eccezionali con $\mathcal{E}(f)$.

La proposizione e il teorema che seguono ci permetteranno di determinare alcune proprietà dei punti eccezionali.

Proposizione 2.14. *Se f è una funzione razionale di grado $\deg(f) = n \geq 2$, allora l'insieme $\mathcal{E}(f)$ dei punti eccezionali è composto da al più due punti. Inoltre ogni eventuale punto eccezionale è superattrattivo.*

Dimostrazione. Sia z un punto di $\hat{\mathbb{C}}$, e consideriamo la sua orbita completa $G = go(z, f)$. Mostriamo ora che $G = f(G)$. Sia $w \in G$: allora per definizione esistono h, k tali che $f^{oh}(w) = f^{ok}(z)$. Essendo f surgettiva, abbiamo che $w = f(v)$ per un qualche $v \in \hat{\mathbb{C}}$. Per v vale la relazione $f^{oh}(w) = f^{o(h+1)}(v) = f^{ok}(z)$, quindi $v \in G$ e $f(v) = w \in f(G)$. Viceversa sia $w \in f(G)$, allora $w = f(v)$ con $v \in G$, per cui vale $f^{oh}(v) = f^{ok}(z)$ per opportuni h e k . Ma allora $f^{oh}(w) = f^{o(h+1)}(v) = f^{o(k+1)}(z)$, e quindi $w \in G$ come voluto.

Se z è un punto eccezionale, allora f manda G in se stesso bigettivamente, e quindi come un unico ciclo (considero un $a_0 \in G$ e applico ripetutamente f). Sia ora w un generico punto in G . Abbiamo appena visto che c'è una sola controimmagine v (di molteplicità n) tramite f . Calcoliamo allora il valore della derivata di f in v . Siano (U, φ) e (V, ψ) due carte centrate in w e v rispettivamente: allora $\varphi \circ f \circ \psi^{-1}(z) =: g(z) = z^n h(z)$ per un opportuno germe in 0 tale che $h(0) \neq 0$. Ma allora vale che $f'(v) = g'(0) = (nz^{n-1}h(z) + z^n h'(z))|_{z=0} = 0$ se $n \geq 2$. Quindi se v è un punto eccezionale, allora è un punto (in generale periodico) superattrattivo.

Supponiamo per assurdo che $\mathcal{E}(f)$ sia di 3 o più punti. Il suo complementare $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$ è mandato in se stesso da f . Quindi per il Teorema 1.17 (Teorema di Montel) la famiglia $\{f|_U^{ok}\}$ sarebbe una famiglia normale, e quindi $U \subseteq \text{Fatou}(f)$. Ma abbiamo appena visto che i punti eccezionali sono superattrattivi, e in particolare attrattivi, quindi appartengono a $\text{Fatou}(f)$ per la Proposizione 2.7. Dunque $\text{Fatou}(f) = \hat{\mathbb{C}}$, il che è assurdo per la Proposizione 2.13. \square

Teorema 2.15 (Teorema di transitività). *Sia f è una funzione razionale di grado $\deg(f) = n \geq 2$, z un qualsiasi punto di $J(f)$ e N un suo intorno. Allora l'unione U di tutte le immagini iterate $f^{\circ k}(N)$ contiene $J(f)$, e tutto $\hat{\mathbb{C}}$ tranne al più due punti. Più precisamente, se $N \cap \mathcal{E}(f) = \emptyset$ allora $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$.*

Dimostrazione. Notiamo prima di tutto che $f(U) \subseteq U$. Se per assurdo $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ fosse di 3 o più punti, per il Teorema 1.17 (Teorema di Montel) U sarebbe contenuto in $\text{Fatou}(f)$ (per un ragionamento analogo a quello fatto nella dimostrazione della Proposizione 2.14). Ma $z \in N \subseteq U$ è un punto in $J(f)$: assurdo. Se poi $N \cap \mathcal{E}(f) = \emptyset$, allora per quello visto nella Proposizione 2.14 anche $f^{\circ k}(N) \cap \mathcal{E}(f) = \emptyset$, e quindi $U = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{E}(f)$. \square

Grazie al Teorema 2.15 (Teorema di transitività) possiamo dimostrare i seguenti enunciati:

Corollario 2.16. *Sia f è una funzione razionale di grado $\deg(f) \geq 2$. Se z_0 è un qualsiasi punto dell'insieme di Julia $J(f)$, allora l'insieme di tutte le controimmagini delle iterate*

$$C := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : f^{\circ n}(z) = z_0 \text{ per qualche } n \geq 0\}$$

è denso in $J(f)$.

Dimostrazione. Osserviamo che in effetti $C \subseteq J(f)$ (vedi la Proposizione 2.4). Per dimostrare che C è denso in $J(f)$, devo mostrare che preso un qualsiasi $z \in J(f)$, e N intorno di z , allora esiste un $w \in C$ tale che $w \in N$. Ma per il Teorema 2.15 (Teorema di transitività), l'unione U degli insiemi $f^{\circ k}(N)$ contiene $J(f)$, e quindi in particolare z_0 . Dunque esistono un $n \geq 0$ e un $w \in N$ tali che $f^{\circ n}(w) = z_0$. Dunque $w \in C \cap N$ è il punto cercato. \square

Proposizione 2.17. *Sia f è una funzione razionale di grado $\deg(f) \geq 2$. Se $A \subseteq \text{Fatou}(f)$ è il bacino d'attrazione di un punto fisso (periodico) attrattivo z_0 , allora il suo bordo $\partial A = \overline{A} \setminus A$ coincide con l'insieme di Julia $J(f)$. Inoltre ogni componente connessa di $\text{Fatou}(f)$ o coincide con una componente connessa di A o è disgiunta da A .*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $J(f) = \partial A$. Dimostriamo innanzitutto la prima inclusione: sia $z \in J(f)$ e N un suo intorno. Per il Teorema 2.15 (Teorema di Transitività) $f^{\circ n}(N)$ interseca A per n abbastanza grande, e quindi anche N interseca A . Questo ci dice che $J(f) \subseteq \overline{A}$, ma $J(f)$ e $A \subseteq \text{Fatou}(f)$ sono disgiunti, quindi $J(f) \subseteq \partial A$. Mostriamo ora la seconda inclusione: sia $z \in \partial A$, e supponiamo per assurdo che $z \in \text{Fatou}(f)$. Allora esiste un intorno U di z tale che $\{f^{\circ n}|_U\}$ sia una famiglia normale. Quindi ogni successione in quella famiglia ammette una

sottosuccessione convergente a una g uniformemente sui compatti di U . Ma in $U \cap A$ la funzione limite g deve coincidere con la costante z_0 . Allora per il principio del prolungamento analitico, $g \equiv z_0$ su tutto U , e quindi $U \subseteq A$: assurdo.

Così la prima parte è dimostrata. Per concludere, basta osservare che se una componente connessa di Fatou(f) interseca A , non potendo intersecare il bordo di A , deve coincidere con qualche componente connessa di A . \square

Capitolo 3

Connessione

3.1 Punti superattrattivi

Nel prossimo capitolo cercheremo criteri per verificare quando un insieme di Julia è connesso, per poi ricavare altre proprietà sul comportamento delle orbite nell'ultimo capitolo. Vogliamo (o forse dobbiamo) ora restringerci ai polinomi: se un polinomio è di grado $n \geq 2$, allora ha un punto fisso superattrattivo all'infinito. Sembra quindi d'obbligo studiare attentamente la dinamica attorno ad un punto fisso superattrattivo, ed è quello che faremo in questa sezione, rimanendo in tutta generalità, per poi specializzarci sui polinomi.

Il risultato fondamentale che segue è stato dimostrato da L. E. Böttcher nel 1904:

Teorema 3.1 (Teorema di Böttcher). *Sia z_0 un punto fisso superattrattivo per \tilde{f} olomorfa e (U, φ) una carta centrata in z_0 , quindi:*

$$\varphi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}(z) =: f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots,$$

con $n \geq 2$ e $a_n \neq 0$. Allora f (presa in un intorno di 0) è coniugata alla mappa $g : w \mapsto w^n$ (in un intorno di 0), tramite una mappa ϕ , unica a meno di moltiplicazione per una radice $(n-1)$ -esima dell'unità.

Dimostrazione. (Esistenza): proporrremo una dimostrazione costruttiva. A meno di coniugare f tramite un'applicazione lineare, possiamo supporre $a_n = 1$. In un intorno dello 0 posso supporre $f(z) = z^n h_1(z)$ con h_1 un opportuno germe in 0 e tale che $h_1(0) = 1$. Supponiamo anche di metterci in un intorno abbastanza piccolo in cui h_1 non si annulli mai. Per induzione si vede che

$$f^{\circ k}(z) = z^{n^k} h_k(z)$$

con h_k un opportuno germe in 0 e tale che $h_k(0) = 1$.

0 è un punto fisso superattrattivo per f , e quindi c'è un intorno di 0 mandato in se stesso da f . Più precisamente, per $z \in \mathbb{D}_\varepsilon = \{z : |z| < \varepsilon\}$ e se $M_\varepsilon = \max_{z \in \mathbb{D}_\varepsilon} |h_1(z)|$ allora si ha che:

$$|f(z)| = |z^n h_1(z)| \leq M_\varepsilon |z|^n \leq \varepsilon^{n-1} M_\varepsilon |z|.$$

Al tendere di ε a 0, M_ε tende a 1, e quindi $\varepsilon^{n-1} M_\varepsilon$ tende a 0 ($n \geq 2$). Scegliendo ε abbastanza piccolo affinché $\varepsilon^{n-1} M_\varepsilon < 1$, si ottiene che $f(\mathbb{D}_\varepsilon) \subset \mathbb{D}_\varepsilon$.

Dal fatto che $f \circ f^{\circ k} = f^{\circ k+1} = f^{\circ k} \circ f$, si ottiene direttamente:

$$\begin{aligned} (f^{\circ k}(z))^n h_1(f^{\circ k}(z)) &= z^{n^{k+1}} h_{k+1}(z) = (f(z))^{n^k} h_k(f(z)) \\ &\Downarrow \\ (h_k(z))^n h_1(f^{\circ k}(z)) &= h_{k+1}(z) = (h_1(z))^{n^k} h_k(f(z)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

che ci dà due formule ricorsive per il calcolo di h_k , che risulta quindi definita e mai nulla su tutto \mathbb{D}_ε , una volta presa h_1 mai nulla. Essendo queste h_k mai nulle, allora per ogni $k \geq 1$ esiste un'unica ψ_k olomorfa in \mathbb{D}_ε e tale che $(\psi_k(z))^{n^k} = h_k(z)$ con $\psi_k(0) = 1$. Poniamo ora $\phi_k(z) = z\psi_k(z)$, così che $\phi_k'(0) = 1$ e $(\phi_k(z))^{n^k} = z^{n^k} (\psi_k(z))^{n^k} = z^{n^k} h_k(z) = f^{\circ k}(z)$.

Vogliamo mostrare che ϕ_k converge uniformemente in \mathbb{D}_ε ad una funzione Φ . Stimiamo allora $\phi_{k+1}(z)/\phi_k(z)$:

$$\left| \frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_k(z)} \right| = \left| \frac{\psi_{k+1}(z)}{\psi_k(z)} \right| = \left| \frac{\psi_{k+1}(z)^{n^{k+1}}}{\psi_k(z)^{n^{k+1}}} \right|^{1/n^{k+1}} = \left| \frac{h_{k+1}(z)}{h_k(z)^n} \right|^{1/n^{k+1}}$$

ricordando la prima uguaglianza di (3.1):

$$= |h_1(f^{\circ k}(z))|^{1/n^{k+1}} = |1 + O(|f^{\circ k}(z)|)|^{1/n^{k+1}} = 1 + \frac{1}{n^{k+1}} O(|f^{\circ k}(z)|) = 1 + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),$$

dove quest'ultimo passaggio è dato dal fatto che $f^{\circ k}(\mathbb{D}_\varepsilon) \subset \mathbb{D}_\varepsilon$. Consideriamo ora il prodotto telescopico:

$$\prod_k \left| \frac{\phi_{k+1}(z)}{\phi_k(z)} \right| = \prod_k \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \right).$$

Per un risultato classico di analisi si ha che $\prod_k (1 + f_k(z))$ converge ad una funzione olomorfa mai nulla se e solo se converge la serie $\sum_k f_k(z)$. In effetti

$$\sum_k O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) = O(1),$$

quindi il prodotto telescopico converge uniformemente a ϕ/ϕ_1 , e $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformemente in \mathbb{D}_ε .

Siccome $\phi'_k(0) = 1$ per ogni k , ne segue che $\phi'(0) = 1$: a meno di restringere ε , posso quindi supporre che ϕ sia un biolomorfismo con l'immagine. Inoltre per le ϕ_k vale la proprietà:

$$\begin{aligned} (\phi_k(f(z)))^{n^k} &= f(z)^{n^k} \psi_k(f(z))^{n^k} = (z^n)^{n^k} h_1(z)^{n^k} h_k(f(z)) \\ &= z^{n^{k+1}} h_1(z)^{n^k} h_k(f(z)) = z^{n^{k+1}} h_{k+1}(z) = (\phi_{k+1}(z))^n, \end{aligned}$$

e quindi $\phi_k \circ f = (\phi_{k+1})^n$. Passando al limite si ottiene $\phi \circ f = g \circ \phi$, che è proprio la relazione che cercavamo.

(*Unicità*): Supponiamo che ϕ e ψ siano due biolomorfismi che coniugano f con g , ovvero che valga:

$$\phi \circ f \circ \phi^{-1} = g = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

Allora vale:

$$g = \psi \circ f \circ \psi^{-1} = \psi \circ \phi^{-1} \circ g \circ \phi \circ \psi^{-1}.$$

Voglio dimostrare che $\eta = \psi \circ \phi^{-1}$ è uguale a cId con c una radice $(n-1)$ -esima dell'unità. Essendo $\eta(0) = 0$, si può scrivere

$$\eta(z) = c_1 z + z^r h(z),$$

con h un germe non nullo in 0. Imponiamo la relazione $\eta \circ g = g \circ \eta$

$$c_1 z^n + z^{rn} h(z^n) = c_1^n z^n + n c_1^{n-1} z^{r+n-1} h(z) + \text{termini di grado maggiore.}$$

Imponendo l'uguaglianza tra i coefficienti dei monomi dello stesso grado si ottiene:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1^n \Rightarrow c_1^{n-1} = 1, \\ 0 &= n c_1^{n-1} h(z) \Rightarrow h \equiv 0, \end{aligned}$$

e quindi $\eta = c_1 Id$ con c_1 radice $(n-1)$ -esima dell'unità. □

Definizione. Sia z_0 un punto fisso superattrattivo per \tilde{f} olomorfa e (U, φ) una carta centrata in z_0 . La mappa ϕ costruita nel Teorema 3.1 (Teorema di Böttcher) è detta **applicazione di Böttcher**. La mappa $\Phi = \phi \circ \varphi$ è invece detta **carta di Böttcher**, ed è tale che:

$$\Phi \circ f = g \circ \Phi. \tag{3.2}$$

Osservazione 3.2. Ora vorremmo estendere questa carta di Böttcher su tutto il bacino di attrazione A del punto fisso z_0 : questo però potrebbe essere problematico. Per ora Φ è definita in un certo aperto, che chiamo U , intorno del punto fisso z_0 . Supponiamo allora di aver esteso Φ su tutto A in modo tale che valga la (3.2). Se

$z \in A$, allora esiste un k tale che $f^{\circ k}(z) = v \in U$. Dalla relazione (3.2) si ottiene che:

$$\Phi(v) = \Phi(f^{\circ k}(z)) = g(\Phi(f^{\circ(k-1)}(z))) = \dots = g^{\circ k}(\Phi(z)) .$$

Quindi se si vuole estendere Φ , bisogna necessariamente imporre

$$\Phi(z) = \sqrt[n^k]{\Phi(f^{\circ k}(z))} ,$$

per k abbastanza grande. Ma questa in generale non è una buona definizione, ad esempio quando il bacino d'attrazione non è semplicemente connesso.

Invece per $|\Phi|$ non ci sono problemi.

Corollario 3.3. *Sia z_0 un punto fisso superattrattivo per f olomorfa e Φ la carta di Böttcher. Allora $|\Phi|$ si estende in un unico modo su tutto il bacino di attrazione A in modo tale che risulti continua e che valga*

$$|\Phi(f(z))| = |\Phi(z)|^n . \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Basta porre $|\Phi(z)|$ uguale a $|\Phi(f^{\circ k}(z))|^{1/n^k}$ per k abbastanza grande.

Se U è un intorno di z_0 dove è già definito $|\Phi|$, e k è tale che $f^{\circ k}(z) = v \in U$, per la (3.2) si ha che:

$$|\Phi(f^{\circ(k+1)}(z))|^{1/n^{k+1}} = |\Phi \circ f(f^{\circ k}(z))|^{1/n^{k+1}} = |\Phi(f^{\circ k}(z))|^{1/n^k} ,$$

e quindi la definizione data è una buona definizione. Ripetendo inoltre il ragionamento dell'Osservazione 3.2, si vede che questo è l'unico modo per estendere la Φ in maniera continua e in modo tale che continui a valere la (3.3). \square

Ma non possiamo accontentarci di questo, cerchiamo quindi di estendere la carta di Böttcher (e non il suo valore assoluto). Vedremo che non si può sempre estendere a tutto il bacino di attrazione.

Teorema 3.4. *Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione razionale con un punto superattrattivo z_0 , A_0 il bacino immediato di attrazione di z_0 e Φ la carta di Böttcher. Allora ci sono solo due possibilità:*

Caso 1: la carta di Böttcher si estende a un biolomorfismo da A_0 al disco unitario \mathbb{D} , e coniuga $f|_{A_0}$ con la mappa $g : w \mapsto w^n$ in \mathbb{D} . In questo caso f non ha punti critici in A_0 oltre a z_0 .

Caso 2: esiste un numero massimo r con $0 < r < 1$ tale che l'inversa locale della carta di Böttcher $\psi_\varepsilon : \mathbb{D}_\varepsilon \rightarrow A_0$ si estende a un biolomorfismo ψ definito su \mathbb{D}_r e a valori in $U = \psi(\mathbb{D}_r) \subset A_0$. In questo caso la chiusura \overline{U} è un compatto di A_0 , e il bordo $\partial U \subset A_0$ contiene almeno un punto critico per f .

Dimostrazione. Sia $\psi_\varepsilon : \mathbb{D}_\varepsilon \rightarrow V \subset A_0$ l'inversa della carta di Böttcher. Per prolungamento analitico posso estendere ψ_ε a una funzione $\psi = \psi_r$ su un disco massimale \mathbb{D}_r . Innanzitutto notiamo che $\psi : \mathbb{D}_r \rightarrow U$ non ha punti critici: supponiamo per assurdo che esista $w \in \mathbb{D}_r$ tale che $\psi'(w) = 0$ (quindi $w \neq 0$). Allora dalla proprietà

$$\psi \circ g = f \circ \psi \tag{3.4}$$

segue che:

$$\psi'(w^n)nw^{n-1} = (\psi \circ g)'(w) = (f \circ \psi)'(w) = f'(\psi(w))\psi'(w) = 0 ,$$

per cui anche w^n è un punto critico per ψ . Iterando il procedimento si ottiene una successione di punti critici che converge a 0, il che è assurdo (gli zeri di una funzione olomorfa sono isolati). Quindi ψ è localmente iniettiva, e dunque l'insieme C delle coppie $w_1 \neq w_2$ tali che $\psi(w_1) = \psi(w_2)$ forma un chiuso di $\mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_r$.

Dimostriamo ora che ψ è globalmente iniettiva. Se $\psi(w_1) = \psi(w_2)$, allora segue dal Corollario 3.3 che $|w_1| = |\Phi(\psi(w_1))| = |\Phi(\psi(w_2))| = |w_2|$. Supponiamo per assurdo che C sia non vuoto. Allora esiste una coppia $w_1 \neq w_2$ con $|w_1| = |w_2|$ minimo (perché C è chiuso). Ma ψ è una mappa aperta (è olomorfa non costante), quindi per ogni w'_1 sufficientemente vicino a w_1 possiamo trovare un w'_2 vicino a w_2 tale che $(w_1, w_2) \in C$. In particolare possiamo prendere un w'_1 tale che $|w'_1| < |w_1|$ (e quindi $|w'_2| = |w'_1| < |w_1| = |w_2|$): abbiamo trovato una coppia in C tale che $|w'_j| < |w_j|$ (per $j = 1, 2$), ma avevamo scelto w_j di modulo minimo, il che ci dà l'assurdo.

L'estensione di $|\Phi|$ definita nel Corollario 3.3 prende valori in \mathbb{D} e tende a 1 per z che tende al bordo di A , quindi l'immagine U di ψ è contenuta in A , ma è anche connessa, e quindi è contenuta in A_0 . Supponiamo che sia $r = 1$: allora ∂U è contenuto in ∂A (che a sua volta coincide con $J(f)$, per la Proposizione 2.17), quindi la componente connessa di A che contiene z_0 , ovvero A_0 , è contenuta in U . Dunque in questo caso $U = A_0$.

Supponiamo ora che sia $r < 1$. Vediamo prima che $\overline{U} \subsetneq A$. Infatti $g(\mathbb{D}_r)$ è contenuto nel compatto $\overline{\mathbb{D}_{r^n}} \subsetneq \mathbb{D}_r$ (essendo $r < 1$); ricordando la (3.4), si ha che $f(U) = f(\psi(\mathbb{D}_r)) = \psi(g(\mathbb{D}_r))$ è contenuto nel compatto $K = \psi(\overline{\mathbb{D}_{r^n}}) \subsetneq \psi(\mathbb{D}_r) = U$. Allora per continuità si ottiene che $f(\overline{U}) \subseteq K \subsetneq U \subseteq A$, da cui segue che $\overline{U} \subseteq f^{-1}(f(\overline{U})) \subsetneq f^{-1}(A) = A$.

Mostriamo infine che ∂U contiene un punto critico per f . Supponiamo per assurdo che f non abbia punti critici in ∂U : vogliamo vedere che allora riusciamo ad estendere ψ su un disco di raggio $s > r$. Sia $w_0 \in \partial \mathbb{D}_r$, e $v_0 \in \partial U$ un punto limite della curva $t \mapsto \psi(tw_0)$ per $t \nearrow 1$. Se v_0 non è un punto critico per f , allora possiamo scegliere un ramo olomorfo h di f^{-1} in un intorno di $f(v_0)$ in modo tale che $h(f(v_0)) = v_0$. Quindi esiste un aperto V intorno di v_0 tale che $h : f(V) \rightarrow V$

sia l'inversa di $f|_V$. Consideriamo ora un disco D_ε centrato in w_0 e di raggio ε . Se vogliamo estendere ψ su D_ε in modo tale che valga la (3.4), dobbiamo chiedere:

$$f(\psi(w)) = \psi(g(w)) .$$

Se prendiamo ε abbastanza piccolo in modo tale che sia $(r + \varepsilon)^n \leq r$ e $\psi(g(D_\varepsilon)) \subset f(V)$ allora possiamo definire su D_ε la ψ come

$$\psi(w) = h(\psi(g(w))) .$$

Se ∂U non ha punti critici per f , per ogni $w_0 \in \partial \mathbb{D}_r$ troviamo quindi un ε tale per cui possiamo estendere la ψ in un disco di centro w_0 e raggio ε . Per compattezza di $\partial \mathbb{D}_r$ riusciamo allora ad estendere ψ in un disco di raggio $s > r$: assurdo. \square

3.2 Connessione dell'insieme di Julia per polinomi

Supporremo d'ora in poi f un polinomio di grado $n \geq 2$, ovvero della forma

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 ,$$

con $n \geq 2$ e $a_n \neq 0$. Allora tutto quello appena visto può essere applicato nel caso di un polinomio. Infatti ogni polinomio di grado $n \geq 2$ ha un punto fisso superattrattivo all'infinito. Diamo una definizione preliminare:

Definizione. L'**insieme di Julia pieno** $\mathbf{K}(f)$ è l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ per cui l'orbita di z (tramite f) è limitata.

Proposizione 3.5. Per ogni polinomio f di grado $n \geq 2$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}(f) \subset \mathbb{C}$ coincide con $\hat{\mathbb{C}} \setminus A_0(\infty)$, e $\mathbf{J}(f) = \partial \mathbf{K}$.

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\mathbf{K} = \hat{\mathbb{C}} \setminus A(\infty)$, ovvero che l'insieme dei punti a orbita limitata è il complementare dell'insieme dei punti la cui orbita tende a ∞ . Inoltre grazie alla proposizione (2.17) si ha che $\partial \mathbf{K} = \partial A(\infty) = \mathbf{J}(f)$. Quindi l'unica cosa da dimostrare è che $A(\infty)$ ha una sola componente connessa, ovvero che coincide con $A_0(\infty)$.

Essendo $A(\infty)$ un intorno (aperto) di ∞ , esiste un certo b abbastanza grande per cui $\{z : |z| > b\} \subset A(\infty)$. Supponiamo ora per assurdo che U sia una componente connessa limitata di $A(\infty)$. Voglio mostrare che $|f^{ok}(z)| \leq b$ per ogni $z \in U$ e per ogni $k > 0$. Se così non fosse, per il principio del massimo avremmo che esiste uno $z \in \partial U \subset \mathbf{J}(f)$ tale che $|f^{ok}(z)| > b$. Ma questo implica che $z \in A(\infty)$, il che è un assurdo. Quindi abbiamo visto che se U fosse una componente connessa limitata di $A(\infty)$, allora apparterebbe a $\mathbf{K}(f)$, che però è disgiunto da $A(\infty)$, e quindi $A(\infty)$ ha una sola componente connessa: quella illimitata. \square

Osservazione 3.6. Nella dimostrazione del teorema precedente, si può trovare una stima per b a partire dai coefficienti del polinomio f : supponiamo dapprima f monico, e cerchiamo b in modo tale che se $|z| > b$ allora $|f(z)| > |z|$. Sia $c = \max_{k=0 \dots n-1} |a_k|$. Allora se $z > b$, segue che:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| &= \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \geq 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z^n|} \\ &> 1 - c \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2} - \dots - \frac{1}{b^n} \right) = 1 - c \frac{1 - b^{-n}}{b - 1} > 1 - \frac{c}{b - 1} =: d(b) \end{aligned}$$

e quindi $|f(z)| \geq d(b) |z^n| > d(b) b^{n-1} |z|$. Se si sceglie c in modo che $d(b) b^{n-1} > 1$, allora b è tale che $|f(z)| > |z| > b$. Ad esempio se $b = \max\{3c, 3\}$, allora $d(b) > \frac{1}{2}$, $d(c) c^{n-1} > \frac{3}{2} > 1$. Se poi f è un generico polinomio, con coefficiente direttore a_n , allora si può ricondurre ad un polinomio monico componendo con una applicazione lineare $z \mapsto \alpha z$ con $\alpha^{n-1} a_n = 1$, e quindi la stima di b è la stessa che nel caso di f monico, moltiplicata per $\sqrt[n-1]{|a_n|}$.

Teorema 3.7. *Sia f un polinomio di grado $n \geq 2$. Se indichiamo con $\text{Crit}(f)$ l'insieme dei punti critici al finito per f , allora si hanno due possibilità:*

Caso 1: $K(f) \supset \text{Crit}(f)$, e allora sia $K(f)$ sia $J(f)$ sono connessi, e $\mathbb{C} \setminus K(f)$ è biolomorfo a $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, il complementare del disco unitario chiuso, tramite una

$$\Phi : \mathbb{C} \setminus K(f) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

che coniuga f su $\mathbb{C} \setminus K(f)$ alla mappa $w \mapsto w^n$ su $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$;

Caso 2: almeno un punto critico al finito per f non appartiene a $K(f)$, e allora sia $K(f)$ sia $J(f)$ hanno un'infinità non numerabile di componenti connesse.

Dimostrazione. Applicando il Teorema 3.1 (Teorema di Böttcher) al punto fisso superattrattivo ∞ , si ottiene la carta di Böttcher, che possiamo estendere grazie al Teorema 3.4 ad un biolomorfismo $\tilde{\Phi} : U \rightarrow \mathbb{D}_r$, con un opportuno $r \leq 1$ massimale e U un opportuno aperto del bacino di attrazione all'infinito A . Consideriamo allora $\Phi = \xi \circ \tilde{\Phi}$, con $\xi : z \mapsto 1/z$: per $\Phi : U \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ vale dunque la relazione (3.2).

Supponiamo che i punti critici di f siano tutti in $K(f)$. Allora per il Teorema 3.4 si ha che $r = 1$, e $U = A_0 = \mathbb{C} \setminus K(f)$ (l'ultima uguaglianza è data dalla Proposizione 3.5). Resta da mostrare che sia $K(f)$ sia $J(f)$ sono connessi. Ogni anello $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$ viene mandato tramite $\Psi = \Phi^{-1}$ in un aperto connesso $\Psi(A_\varepsilon) \subset \mathbb{C} \setminus K(f)$. Allora la sua chiusura $\overline{\Psi(A_\varepsilon)}$ è un compatto connesso che contiene $J(f) = \partial K(f)$. Ne segue che l'intersezione

$$J(f) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\Psi(A_\varepsilon)}$$

è ancora connessa. Segue poi dalla Proposizione 3.5 che anche $K(f)$ è connesso (essendo un compatto con bordo connesso).

Supponiamo ora invece che ci sia almeno un punto critico per f in $\mathbb{C} \setminus K(f)$. Questa volta il Teorema 3.4 ci dice che esiste un minimo numero $r > 1$ tale che l'inversa Ψ di Φ si estenda ad un biolomorfismo

$$\Psi : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r} \rightarrow U \subsetneq A = \mathbb{C} \setminus K(f) .$$

Inoltre ∂U è un compatto di $\mathbb{C} \setminus K(f)$ che contiene almeno un punto critico per f .

Sia ora $c \in \partial U$ un punto critico per f . Il corrispondente valore critico $v = f(c)$ appartiene a U : basta verificare che $\Phi(v)$ sia in $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$, ovvero che $|\Phi(v)| > r$. Ma $|\Phi(v)| = |\Phi(f(c))| = |g(\Phi(c))| = r^n > r$. Consideriamo ora il raggio infinito $R \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$, ovvero l'insieme dei punti della forma $t\Phi(v)$, con $t \geq 1$, e $R' \subset U$ l'immagine di R tramite Ψ . Consideriamo ora l'insieme $f^{-1}(R') \subset \overline{U}$. Siccome U non ha punti critici per f , l'intersezione $U \cap f^{-1}(R')$ consiste di n curve distinte, che corrispondono tramite Φ agli n raggi infiniti distinti di $\sqrt[n]{R} \subset \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r}$ (e quindi sono curve semplici). Ognuna di queste curve deve finire in un punto z di ∂U soluzione dell'equazione $f(z) = v$. Ma questa equazione ha una soluzione (almeno) doppia in c , e quindi ci sono almeno due curve R'_1 e R'_2 che finiscono in c . L'unione $R'_1 \cup R'_2 \subset \overline{U}$ divide allora il piano in due aperti connessi, che chiamiamo V_0 e V_1 .

Osserviamo ora che sia $f(V_0)$ sia $f(V_1)$ contengono $\mathbb{C} \setminus R'$: sia $k = 0$ o 1 . Allora $f(V_k)$ è un aperto, essendo V_k aperto e f olomorfa non costante, e quindi aperta. Se $\hat{z} \in \mathbb{C}$ è un punto del bordo di $f(V_k)$, allora posso prendere una successione z_i di elementi di V_k tale che $f(z_i)$ converga a \hat{z} . Gli z_i non possono divergere all'infinito ($\hat{z} \neq \infty$), sono quindi limitati da un certo punto in poi, e posso estrarne una sottosuccessione convergente ad un certo $z' \in \mathbb{C}$. Si ha dunque che $f(z') = \hat{z}$: essendo f aperta, allora z' deve appartenere a $\partial V_k = R'_1 \cup R'_2$, e quindi $\hat{z} \in R'$. Essendo poi $\mathbb{C} \setminus R'$ connesso, allora

$$f(V_k) \supset \mathbb{C} \setminus R' \supset K(f) .$$

Sia ora $J_k = J \cap V_k$, con $J = J(f)$. Ne segue che $f(J_k) = J$ e che J_0 e J_1 sono compatti disgiunti di J tali che $J_0 \cup J_1 = J$. In maniera analoga possiamo suddividere ogni J_k in due compatti disgiunti $J_{k_0} = J_k \cap f^{-1}(J_0)$ e $J_{k_1} = J_k \cap f^{-1}(J_1)$. Procedendo induttivamente, riesco a suddividere J in 2^{p+1} compatti disgiunti della forma

$$J_{k_0 \dots k_p} = J_{k_0} \cap f^{-1}(J_{k_1}) \cap \dots \cap f^{-1}(J_{k_p}) ,$$

con $f(J_{k_0 \dots k_p}) = J_{k_1 \dots k_p}$. Per una successione infinita k_0, k_1, k_2, \dots di 0 e 1 consideriamo poi $J_{k_0 k_1 k_2 \dots}$ l'intersezione della catena di contenimenti

$$J_{k_0} \supset J_{k_0 k_1} \supset J_{k_0 k_1 k_2} \supset \dots .$$

Ognuna di queste intersezioni è compatta e non vuota. Otteniamo così un'infinità non numerabile di compatti non vuoti e disgiunti la cui unione è J . Ma ogni componente connessa di J deve essere contenuta in uno e uno solo di questi $J_{k_0 k_1 k_2 \dots}$, e quindi J ha un'infinità non numerabile di componenti connesse. La dimostrazione per $K(f)$ è analoga, basta ripetere gli stessi passi con $K(f)$ anziché $J(f)$. \square

Definizione. La mappa ϕ costruita nel Teorema 3.7 è detta **mappa di Böttcher**.

Osservazione 3.8. La condizione imposta per distinguere i due casi in questo teorema è abbastanza facile da verificare (per un calcolatore): bisogna trovare gli zeri di f' , che sono $n - 1$ (contati con molteplicità), e verificare se le loro orbite sono limitate o meno, usando come stima quella dell'Osservazione (3.6).

Nel caso di insieme di Julia connesso, il Teorema (3.7) ci dà la mappa di Böttcher Φ che coniuga il polinomio f ad una funzione, l'elevamento a potenza n -esima, il cui comportamento è molto più semplice. D'ora in poi ci restringeremo a questo caso. Introduciamo allora degli strumenti essenziali per lo studio dell'insieme di Julia per polinomi.

Definizione. Se f è un polinomio di grado $n \geq 2$, nel caso di un insieme di Julia $J(f)$ connesso, abbiamo per il Teorema (3.7) la mappa di Böttcher Φ definita su $\mathbb{C} \setminus K(f)$ e tale che $|\Phi(z)| > 1$. Possiamo definire quindi una funzione $G : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$, detta **funzione di Green**, o **potenziale canonico**, nel seguente modo:

$$G(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in K(f) , \\ \log |\Phi(z)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} \log |f^{\circ k}(z)| > 0 & \text{se } z \in \mathbb{C} \setminus K(f) . \end{cases}$$

Ricordando la (3.2), si ha che

$$G(f(z)) = \log(|\Phi(f(z))|) = \log(|\Phi(z)|^n) = n \log(|\Phi(z)|) = nG(z) ,$$

ovvero

$$G(f(z)) = nG(z) . \quad (3.5)$$

Definizione. Le curve di livello $G^{-1}(c) = \{z : G(z) = c\}$ della funzione di Green sono dette **curve equipotenziali**. Ricordando la (3.5), f agisce sulle curve equipotenziali mandando $G^{-1}(c)$ in $G^{-1}(nc)$ come un rivestimento a n falde.

Definizione. Le curve ortogonali alle curve di livello $R_t = \{z : \arg(\Phi(z)) = 2\pi t\}$ sono dette **raggi esterni**. Un raggio esterno R_t è detto **razionale** se $t \in \mathbb{Q}$. Ricordando la (3.2), si ha che

$$f(R_t) = f(\Phi^{-1}(\{e^{r+2\pi it} | r > 0\})) = \Phi^{-1}(\{e^{nr+2\pi int} | r > 0\}) = R_{nt} ,$$

e quindi

$$f(R_t) = R_{nt} \quad (3.6)$$

Definizione. Un raggio esterno R_t è detto **fisso**, se $f(R_t) = R_t$, ovvero se t è un punto fisso per la funzione $g : t \mapsto nt \pmod{1}$. R_t è poi detto **periodico** di periodo k se k è il minimo intero tale che $f^{\circ k}(R_t) = R_t$, ovvero se t è un punto periodico di periodo k per g ; è infine detto **preperiodico** se esiste un h tale che $f^{\circ h}(R_t)$ è un raggio esterno periodico di un certo periodo k , ovvero se t è un punto preperiodico per g .

La cosa principale che ci chiederemo di questi raggi esterni è come si comportano avvicinandosi all'insieme di Julia:

Definizione. Si dice che un raggio esterno R_t **approda** ad un certo punto $\gamma(t)$ se:

$$\exists \lim_{r \searrow 1} \phi^{-1}(re^{2\pi it}) = \gamma(t)$$

Se questo avviene il punto $\gamma(t)$ appartiene necessariamente a $J(f)$.

Verifichiamo una semplice proprietà che ci sarà utile in seguito

Lemma 3.9. *Se il raggio esterno R_t approda a un certo punto $\gamma(t)$, allora:*

- *il raggio R_{nt} approda al punto $\gamma(nt) = f(\gamma(t))$.*
- *gli n raggi della forma $R_{(t+j)/n}$ approdano a un punto di $f^{-1}(\gamma(t))$, e ogni punto di $f^{-1}(\gamma(t))$ è di approdo per almeno uno di quei raggi.*

Dimostrazione. Sia $z = \gamma(t)$; se z non è un punto critico per f , allora f manda un intorno N di z (abbastanza piccolo) diffeomorficamente in un intorno N' di $f(z)$, mandando $N \cap R_t$ in $N' \cap R_{nt}$, il che dimostra entrambi i punti.

Se invece z è un punto critico per f , allora f manda ancora un intorno N di z (abbastanza piccolo) in un intorno N' di $f(z)$, in modo tale che f ristretto a $N \setminus \{z\}$ sia un rivestimento a n fogli. Quindi il primo punto si ottiene come prima, mentre per il secondo questa volta ogni raggio esterno che approda a $f(z)$ è coperto (nel senso del rivestimento) da due o più raggi esterni che approdano a z . \square

Capitolo 4

Connessione locale

4.1 Teoria di Carathéodory

Ricordiamo la definizione di locale connessione:

Definizione. Uno spazio topologico X si dice **localmente connesso** se esiste un sistema fondamentale di aperti connessi, ovvero per ogni $x \in X$ e $U \ni x$ intorno di x esiste un intorno V connesso e tale che $x \in V \subset U$.

Della teoria topologica, dovuta principalmente a Carathéodory e che ci sarà utile per caratterizzare gli insiemi di Julia connessi e localmente connessi, esporremo solamente il risultato finale, utile per nostri scopi (confronta [M, Theorem 17.14]):

Teorema 4.1 (Teorema di Carathéodory). *Sia $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U \subset \hat{\mathbb{C}}$ un biolomorfismo. Allora sono fatti equivalenti:*

- (i) ψ si estende a una funzione continua da $\overline{\mathbb{D}}$ a \overline{U} ,
- (ii) ∂U è localmente connesso,
- (iii) $\hat{\mathbb{C}} \setminus U$ è localmente connesso.

4.2 Connessione locale dell'insieme di Julia per polinomi

Prima un piccolo lemma di topologia:

Lemma 4.2. *Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua e surgettiva da uno spazio compatto e localmente connesso X a uno spazio di Hausdorff Y , allora anche Y è compatto e localmente connesso.*

Dimostrazione. Si vede immediatamente che Y è compatto, perché immagine tramite la funzione continua f dello spazio compatto X .

Mostriamo allora la connessione locale di Y . Sia $y \in Y$ e $N \ni y$ intorno aperto di y . Notiamo che $f^{-1}(N)$ è un aperto (sempre perché f è continua) che contiene $f^{-1}(y)$. Per ogni $x \in f^{-1}(y)$ sia C_x un intorno connesso di x contenuto in $f^{-1}(N)$ (esiste per la locale connessione di X), e sia V_x un intorno aperto di x contenuto in C_x :

$$\forall x \in f^{-1}(y) \quad x \in V_x \subseteq C_x \subseteq f^{-1}(N) .$$

Allora $f(C_x)$ è ancora un connesso contenuto in N . Siccome $y \in \bigcap_{x \in f^{-1}(y)} f(C_x) \neq \emptyset$, allora $B := \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} f(C_x)$ è ancora un connesso che contiene y . Resta da mostrare che B è un intorno, ovvero che esiste un aperto A tale che $y \in A \subseteq B$. Sia

$$V = \bigcup_{x \in f^{-1}(y)} V_x ,$$

che è ancora un aperto di X . Allora $X \setminus V$ è un chiuso, $f(X \setminus V)$ è un chiuso (perché una funzione da un compatto a un T_2 è chiusa), il suo complementare $Y \setminus f(X \setminus V)$ è quindi un aperto A . Evidentemente $y \in A$; voglio dimostrare inoltre che $A \subseteq B$. Ma

$$A = f \left(\left(\bigcup V_x \right)^c \right)^c = f \left(\bigcap V_x^c \right)^c \subseteq \left(\bigcap f(V_x^c) \right)^c = \bigcup f(V_x^c)^c .$$

Ma essendo f surgettiva, si ha:

$$= \bigcup f(V_x^c)^c \subseteq \bigcup f(V_x) \subseteq \bigcup f(C_x) = B ,$$

quindi $y \in A \subseteq B$, proprio come volevamo. □

Possiamo ora enunciare e dimostrare il

Teorema 4.3 (Criterio di approdo). *Sia f un polinomio di grado $n \geq 2$ tale che il suo insieme di Julia sia connesso. Allora le seguenti quattro condizioni sono equivalenti:*

- (i) ogni raggio esterno R_t approda a un punto $\gamma(t)$ che dipende in maniera continua dall'angolo t .
- (ii) l'insieme di Julia $J(f)$ è localmente connesso.
- (iii) l'insieme di Julia pieno $K(f)$ è localmente connesso.
- (iv) l'inversa della mappa di Böttcher $\Phi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K(f)$ si estende sul bordo $\partial \mathbb{D}$ a una funzione continua, mandando $e^{2\pi i t} \in \partial \mathbb{D}$ in $\gamma(t)$.

Inoltre se valgono queste condizioni, la funzione $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f)$ soddisfa la proprietà

$$\gamma(nt) = f(\gamma(t)) \quad (4.1)$$

e manda la circonferenza \mathbb{R}/\mathbb{Z} surgettivamente sull'insieme di Julia $J(f)$.

Dimostrazione. ($i \Rightarrow ii$): γ è una funzione continua da \mathbb{R}/\mathbb{Z} spazio topologico compatto e localmente connesso, a $J(f)$ spazio topologico di Hausdorff. Quindi per il Lemma 4.2 anche $C := \gamma(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subseteq J(f)$ è localmente connesso. Basta dimostrare che γ è surgettiva, ovvero che $C = J(f)$. Sia z_0 un punto di C . Allora per il Lemma 3.9 anche $f^{-1}(z_0) \subset C$. Iterando il procedimento, si ottiene per il Corollario 2.16 che C è denso in $J(f)$. Ma è anche un chiuso, mentre $J(f)$ è connesso, e quindi C coincide con $J(f)$.

($ii \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iv$): si dimostra direttamente applicando il Teorema 4.1 (Teorema di Carathéodory) al biolomorfismo $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U = \mathbb{C} \setminus K(f)$, con $\psi(w) = \Phi^{-1}(1/w)$: le condizioni (ii), (iii) e (iv) corrispondono alle (ii), (iii) e (i) rispettivamente del teorema di Carathéodory.

($iv \Rightarrow i$): per definizione il punto di approdo del raggio R_t è $\lim_{r \searrow 1} \Phi^{-1}(re^{2\pi it})$. Per ipotesi Φ^{-1} si estende in maniera continua sulla circonferenza unitaria, e quindi il punto di approdo di R_t è $\Phi^{-1}(e^{2\pi it})$, che è proprio $\gamma(t)$ definita nel punto (iv), continua perché restrizione dell'estensione (continua) di Φ^{-1} .

Se valgono queste condizioni equivalenti, allora si è visto nella dimostrazione ($i \Rightarrow ii$) che γ è surgettiva, mentre per continuità si dimostra la (4.1) a partire da (3.6), o più semplicemente dal Lemma 3.9. \square

Capitolo 5

Lemma della chiocciola e sue conseguenze

5.1 Lemma della chiocciola

Questa sezione è dedicata al risultato portante che sarà alla base dei discorsi del resto del capitolo. Tutto ciò che vedremo è principalmente frutto del lavoro (degli anni '80) di Adrien Douady e Dennis P. Sullivan.

Lemma 5.1 (Lemma della chiocciola). *Sia S una superficie di Riemann, e $f : S \rightarrow S$ una funzione olomorfa con un punto fisso z_0 ; sia V un intorno di quel punto fisso e supponiamo che esista una curva $p : [0, \infty) \rightarrow V \setminus \{z_0\}$ che sia mandata in se stessa da f , in modo tale che*

$$f(p(t)) = p(t + 1), \quad (5.1)$$

e che converga a z_0 per $t \rightarrow \infty$. Allora se $\lambda = f'(z_0)$ è il moltiplicatore di f in z_0 , deve essere $|\lambda| < 1$ o $\lambda = 1$.

Dimostrazione. Per ipotesi l'orbita di $p(0)$ tramite f è $p(0) \mapsto p(1) \mapsto p(2) \mapsto \dots$, e converge a z_0 , che quindi non può essere un punto fisso repulsivo: $|\lambda| \leq 1$. Supponiamo ora che $|\lambda| = 1$. Sia (U, φ) una carta centrata in z_0 : consideriamo allora $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ anziché f e $\varphi(U \cap V)$ anziché V (che continueremo a chiamare sempre f e V). f ha un punto fisso in 0, mentre $f'(0) = \lambda \neq 0$, quindi esiste un r_0 abbastanza piccolo affinché $f|_{\mathbb{D}_{r_0}}$ sia un biolomorfismo (per il teorema della funzione inversa). In particolare, se $D^* = \mathbb{D}_{r_0} \setminus \{0\}$, allora $f(D^*) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Possiamo inoltre scrivere:

$$f(z) = \lambda zh(z),$$

con h un opportuno germe in 0, olomorfo mai nullo e tale che $h(0) = 1$. Introduciamo ora le coordinate polari, in modo tale che $z = re^{i\theta}$. Consideriamo allora

$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e il suo rivestimento universale $\pi : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ definito da $\pi(r, \theta) = re^{i\theta}$.

Sia poi $\tilde{p}(t) = (r(t), \theta(t))$ il sollevamento di p tramite π , tale che $\tilde{p}(t_0) = (|p(t_0)|, \arg p(t_0))$, con $\arg p(t_0) \in [0, 2\pi)$, e t_0 tale che $p(t_0) \in D^*$. Sia poi $\tilde{\pi} : (0, r_0) \times \mathbb{R} \rightarrow D^*$ la restrizione di π a $(0, r_0) \times \mathbb{R}$, che risulta essere il rivestimento universale di D^* . Sia inoltre $\tilde{f} = (\tilde{r}, \tilde{\theta})$ il sollevamento di $f|_{D^*}$ tramite $\tilde{\pi}$ e π (ovvero tale che $\pi \circ \tilde{f} = f \circ \tilde{\pi}$), tale che $\tilde{f}(\tilde{p}(t_0)) = \tilde{p}(t_0 + 1)$. Per \tilde{f} vale che:

$$\tilde{f}(z) = (|z| + o(1), \arg(z) + c + o(1)) \quad (5.2)$$

per $z \rightarrow 0$, con c , che possiamo scegliere in $[0, 2\pi)$, un'opportuna costante tale che $e^{ic} = \lambda$. Osserviamo che per la scelta fatta dei punti iniziali dei sollevamenti, si ha che $\tilde{p}(t+1) = \tilde{f}(\tilde{p}(t))$. Allora dalla (5.1):

$$(r(t+1), \theta(t+1)) = \tilde{p}(t+1) = \tilde{f}(\tilde{p}(t)) = (r(t) + o(1), \theta(t) + c + o(1))$$

per $t \rightarrow \infty$.

Supponiamo per assurdo che c sia diverso da 0 (e quindi λ diverso da 1). Scegliamo allora una costante $r_1 < r_0$ abbastanza piccola per cui valga la (5.2) e tale che $\tilde{\theta}(z) > \arg(z) + \frac{\epsilon}{2}$ se $|z| < r_1$. Sia poi t_1 tale che per ogni $t > t_1$ valga $r(t) < r_1$ e $\theta(t+1) > \theta(t) + \frac{\epsilon}{2}$, e sia $\theta_1 = \theta(t_1)$. Consideriamo allora la regione $L \subset (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ delimitata dalla semiretta $\{r = 0, \theta \geq \theta_1\}$, dal segmento $\{\theta = \theta_1, 0 \leq r \leq r(t_1)\}$ e da $\tilde{p}([t_1, +\infty))$. Allora \tilde{f} manda L in sé: infatti $\tilde{\theta} > \theta_1$ (per come abbiamo scelto t_1), \tilde{f} manda connessi in connessi, la curva \tilde{p} in sé, e $\tilde{f}(L)$ contiene punti con r arbitrariamente piccolo. Inoltre preso un qualsiasi punto $z \in L$, la sua orbita tramite \tilde{f} è tale che il valore di θ tende ad $+\infty$ (ogni volta che applico \tilde{f} , il valore di θ aumenta almeno di $\frac{\epsilon}{2}$). Ma $\theta(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$, mentre $r(t) \rightarrow 0$: ne segue che le orbite di tutti i punti di L divergono al punto all'infinito di \bar{L} . Passando a $V \setminus \{0\}$, abbiamo trovato $M = \pi(L)$ tale che $M \cup \{0\}$ sia un intorno di 0 in cui ogni orbita viene attratta da 0: quindi 0 è un punto fisso attrattivo e $|\lambda| < 1$, il che è assurdo. \square

In realtà il risultato che useremo direttamente è un immediato corollario di questo lemma:

Corollario 5.2. *Sia f una funzione olomorfa con un punto fisso z_0 , V un intorno di quel punto fisso e supponiamo che esista una curva semplice $p : [0, \infty) \rightarrow V \setminus \{z_0\}$ che sia mandata in se stessa da f , in modo tale che $f(p(t)) = p(t-1)$, e che converga a z_0 per $t \rightarrow \infty$. Allora se $\lambda = f'(z_0)$ è il moltiplicatore di f in z_0 , deve essere $|\lambda| > 1$ o $\lambda = 1$.*

Dimostrazione. Siccome per ipotesi $f(p(t)) = p(t-1)$, l'orbita $\dots \mapsto p(2) \mapsto p(1) \mapsto p(0)$ è respinta da z_0 , che quindi non può essere un punto fisso attrattivo:

$|\lambda| \geq 1$. In particolare $\lambda = f'(z_0) \neq 0$, quindi f è un biolomorfismo locale in z_0 , e posso considerare f^{-1} . Applicando il Lemma 5.1 (Lemma della chiocciola) a f^{-1} , si ottiene la tesi. \square

Possiamo ora dimostrare il punto cruciale:

Teorema 5.3. *Se un raggio esterno fisso $R_t = f(R_t)$ approda a un punto fisso z_0 , allora z_0 è un punto fisso repulsivo o parabolico.*

Dimostrazione. Voglio utilizzare il Corollario (5.2), applicandolo a una opportuna parametrizzazione del raggio fisso. Se Φ è la mappa di Böttcher, e G è la funzione di Green, allora la prima parametrizzazione che viene in mente per R_t è della forma $p : s \mapsto \Phi^{-1}(e^{h(s)+2\pi it})$, per un opportuna funzione h a valori in \mathbb{R}_+ . Questa parametrizzazione si può vedere anche in termini delle curve equipotenziali: $p(s)$ è l'unica intersezione tra R_t e la curva equipotenziale $G^{-1}(h(s))$. f manda il raggio esterno fisso R_t in sé; ricordando la (3.2), si ha:

$$f(p(s)) = f \circ \Phi^{-1}(e^{h(s)+2\pi it}) = \Phi^{-1}(e^{nh(s)+2\pi int}) = \Phi^{-1}(e^{nh(s)+2\pi it}) ,$$

dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che R_t è fisso, ricordando la (3.6). Imponiamo ora la condizione del Corollario 5.2:

$$\Phi^{-1}(e^{nh(s)+2\pi it}) = f(p(s)) = p(s-1) = \Phi^{-1}(e^{h(s-1)+2\pi it}) .$$

Quindi deve essere $nh(s) = h(s-1)$. Si vede che $h(s) = n^{-s}$ soddisfa questa condizione. Abbiamo dunque parametrizzato il raggio fisso R_t tramite una $p : \mathbb{R} \rightarrow R_t$ tale che $f(p(s)) = p(s-1)$, e tale che: $p(s) \rightarrow z_0$ per $s \rightarrow +\infty$. Applicando ora il Corollario 5.2, si ottiene che se λ è il moltiplicatore di f in z_0 , allora $|\lambda| > 1$ o $\lambda = 1$, e quindi il punto fisso z_0 è repulsivo o parabolico. \square

5.2 Risultati conclusivi

Possiamo ora applicare i risultati della sezione precedente per studiare la dinamica dei punti fissi e periodici nell'insieme di Julia, e vedere quando non ci può essere un comportamento troppo caotico, ovvero quando possiamo escludere i punti di Cremer. Dapprima utilizziamo tutta la potenza del Teorema 4.3 (Criterio di approdo) supponendo connessione e connessione locale per $J(f)$, per poi cercare di ricavare informazioni analoghe senza supporre la connessione locale.

Teorema 5.4. *Sia f un polinomio di grado $n \geq 2$ per cui l'insieme di Julia $J(f)$ sia connesso e localmente connesso. Allora ogni punto periodico dell'insieme di Julia è repulsivo o parabolico.*

Dimostrazione. L'idea sta nello sfruttare le ipotesi tramite il Teorema 4.3 (Criterio di approdo), per arrivare ad applicare il Teorema 5.3. Consideriamo prima un punto fisso $z_0 \in J(f)$. Per il punto (i) del Teorema 4.3 (Criterio di approdo) ho una funzione $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow J(f)$ continua e surgettiva, che associa ad un angolo t il punto d'approdo del suo raggio esterno $\gamma(t)$. Consideriamo ora l'insieme degli angoli il cui raggio approda a z_0 , ovvero $\gamma^{-1}(z_0)$. Questo insieme, che chiameremo X , risulta essere chiuso, in quanto controimmagine tramite la funzione continua γ del chiuso $\{z_0\}$, e quindi compatto, essendo tale \mathbb{R}/\mathbb{Z} . Inoltre X viene mandato in se stesso dall'applicazione $g : t \mapsto nt \pmod{1}$ in maniera omeomorfa. Infatti z_0 non è un punto critico per f (altrimenti sarebbe un punto fisso superattrattivo, e quindi appartenente a $\text{Fatou}(f)$), e grazie al Lemma 3.9 si ottiene che g è bigettiva. Inoltre g è evidentemente continua, e va da un compatto a un T_2 : è quindi chiusa, e perciò omeomorfismo.

Voglio ora dimostrare che, date tutte queste proprietà, X un insieme finito. Sia allora $\{U_\alpha\}$ un ricoprimento di X , supponiamo formato da palle di diametro al più δ : essendo X compatto, ne posso estrarre un sottoricoprimento finito $\{U_i\}_{i \leq m}$. Consideriamo ora g^{-1} : la sua azione su U_i è quella di ridurre il diametro di un fattore $1/n$, e quindi $\{g^{-1}(U_i)\}_{i \leq m}$ è ancora un ricoprimento di X formato da palle di diametro al più δ/n . Iterando questo procedimento, si ottengono ricoprimenti sempre più fini, con m palle di diametro al più δ/n^k . Per l'arbitrarietà di k , questo ci dice che X è formato da al più m punti.

A questo punto, eventualmente passando ad un'iterata di f (di grado l'ordine di g come permutazione di m elementi, e quindi al più l' m -esima iterata), posso considerare g come l'identità su X . In particolare c'è almeno un raggio fisso che approda in z_0 . Posso quindi applicare il Teorema 5.3 e ottenere la tesi nel caso di un punto fisso.

Per passare al caso di un punto periodico, basta applicare l'Osservazione 2.6. □

Osservazione 5.5. Questo teorema ci dice quindi che nel caso di insiemi di Julia connessi e localmente connessi, non esistono punti di Cremer; tutti i punti periodici irrazionali sono di Siegel.

Questo risultato è molto interessante ma non troppo applicabile: infatti non c'è un criterio semplice per determinare a partire dal solo polinomio f se il relativo insieme di Julia $J(f)$ sia localmente connesso o meno. Comunque riusciremo a dire qualcosa anche supponendo solo la connessione per $J(f)$, condizione molto più semplice da verificare (ricordando il Teorema 3.7, o l'Osservazione 3.8). Ma prima dimostriamo un lemma:

Lemma 5.6. *Sia $p : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una curva limitata in \mathbb{C} , e C l'insieme dei punti limite per $t \rightarrow +\infty$. Allora C è compatto, connesso e non vuoto.*

Dimostrazione. Vediamo prima che C è non vuoto: infatti presa ad esempio la successione $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, questa è limitata, quindi ammette una sottosuccessione convergente ad un certo punto z , che appartiene a C . Osserviamo che

$$C = \bigcap_{t \geq 0} \overline{p([t, +\infty))}.$$

Ma $p([t, +\infty))$ è connesso perché p è continua, quindi $\overline{p([t, +\infty))}$ è connesso (la chiusura di un connesso è connessa negli spazi di Hausdorff), e compatto (essendo la curva limitata). Allora l'intersezione di questa successione decrescente di insiemi connessi e compatti è ancora connessa e compatta. \square

Teorema 5.7. *Sia f un polinomio di grado $n \geq 2$ per cui l'insieme di Julia $J(f)$ sia connesso. Allora ogni raggio esterno periodico approda a un punto periodico repulsivo o parabolico.*

Dimostrazione. Trattiamo prima un raggio esterno fisso: ora non possiamo più applicare il Teorema 4.3 (Criterio di approdo), e il difficile sarà dimostrare che il raggio esterno approdi. Una volta visto questo, utilizzando il Teorema 5.3 si ottiene la tesi per un raggio fisso. Per passare al caso di un punto periodico, basterà al solito applicare l'Osservazione 2.6.

Tramite Φ la mappa di Böttcher, $\mathbb{C} \setminus K$ è biolomorfo a $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, che è una superficie iperbolica. Per il Teorema 1.1 (Teorema di uniformizzazione), il suo rivestimento universale è biolomorfo al disco \mathbb{D} . Usiamo un'altro modello di superficie iperbolica semplicemente connessa: $H = \{u + iv : u > 0\}$. Allora il rivestimento universale è $exp : H \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ l'esponenziale. Abbiamo quindi:

$$H \xrightarrow{exp} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{C} \setminus K(f).$$

Da un semplice calcolo si nota che i raggi esterni corrispondono alle semirette orizzontali. Inoltre la mappa $f : \mathbb{C} \setminus K \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ è coniugata (ovvero sollevata tramite Φ^{-1}), alla mappa $g : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ (g è la funzione potenza n -esima), che a sua volta si solleva tramite exp all'applicazione $w \mapsto nw$. f è quindi un'isometria locale rispetto alla metrica di Poincaré di $\mathbb{C} \setminus K$, essendo $w \mapsto nw$ un'isometria di H per la metrica di Poincaré di H . Sia allora R_t un raggio esterno fisso, e parametrizziamolo come nella dimostrazione del Teorema 5.3 con $p : s \mapsto \Phi^{-1}(e^{h(s)+2\pi it})$, dove questa volta $h(s) = e^s$. In questo caso si ha che $f(p(s)) = p(s + \log n)$. Spezzettiamo quindi il raggio fisso in unione di segmenti della forma:

$$I_k = p([k \log n, (k+1) \log n])$$

e di lunghezza di Poincaré $\log n$ (ricordando la (1.5)). Osserviamo che f manda I_k in I_{k+1} isometricamente. Se G è la funzione di Green, si vede subito che $G(p(s)) =$

e^s tende a 0 quando $s \rightarrow -\infty$, e quindi ogni punto limite \hat{z} di $p(s)$ per $s \rightarrow -\infty$ deve appartenere a $J(f) = \partial K(f)$.

Sia ora \hat{z} un punto limite di $p(s)$ per $s \rightarrow -\infty$: esiste dunque una successione $\{p_i = p(s_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$, con t_i decrescenti a $-\infty$. A meno di aggiungere dei punti nella successione, possiamo supporre inoltre che $t_i - t_{i+1} < \log n$. Applichiamo ora il Teorema 1.14 alle superfici di Riemann $S = \mathbb{C} \setminus K$ e $T = \mathbb{C}$, $r = 2 \log n$, alla successione p_i , e ai dischi aperti $N_r(p_i)$ di centro p_i e raggio r : allora il diametro rispetto alla metrica euclidea di \mathbb{C} degli $N_r(p_i)$ tende a 0. Siccome per ogni i esiste un k tale che $I_k \subset N_r(p_i)$ (abbiamo preso $t_i - t_{i+1} < \log n$ per ogni i), qualsiasi intorno aperto N di \hat{z} possiamo trovare un altro intorno N' contenuto in N e tale che ogni I_k che interseca N' sia contenuto in N . Inoltre $N \cap f(N) \neq \emptyset$: infatti se I_k è contenuto in N (cosa che avviene quando k è abbastanza piccolo), allora $p(k \log n)$ e $f(p(k \log n)) = p((k+1) \log n)$ appartengono a I_k , e quindi a N , dunque $p(k \log n) \in N \cap f(N)$. Per arbitrarietà di N , se \hat{z} è un punto limite di p , allora deve essere un punto fisso per f . Ma per il Lemma 5.6 l'insieme dei punti limite è connesso, mentre l'insieme dei punti fissi per f è discreto (f è un polinomio): quindi esiste un unico punto limite \hat{z} , al quale il raggio esterno R_t approda. \square

Per raffinare un po' questo risultato, dimostriamo un altro teorema sul comportamento dei raggi esterni razionali che approdano a un certo punto:

Teorema 5.8. *Se un raggio esterno periodico approda ad un punto z_0 , allora solo un numero finito di raggi approdano a z_0 , e questi raggi sono tutti periodici dello stesso periodo (in generale un multiplo del periodo di z_0).*

Dimostrazione. Anche in questo caso studieremo prima il caso di un raggio esterno fisso R_t , per poi passare al caso generale di un raggio esterno periodico, applicando come al solito l'Osservazione 2.6. Sia allora $R_t = f(R_t)$ un raggio fisso che approda a un certo punto z_0 : per continuità (o anche per il Lemma 3.9) allora anche z_0 è un punto fisso per f . Inoltre dalla (3.6) segue che se R_t è un raggio esterno fisso, allora è della forma $j/(n-1)$, con j che varia tra gli interi, in modo tale che $t \equiv nt \pmod{\mathbb{Z}}$. Osserviamo che z_0 non può essere un punto critico per f (altrimenti sarebbe un punto superattrattivo, e quindi appartenerebbe all'insieme di Fatou), quindi esiste un intorno N di z_0 in cui f sia un biolomorfismo. Consideriamo ora l'insieme X degli angoli x tali per cui il relativo raggio esterno R_x approdi a z_0 : essendo $f|_N$ un biolomorfismo, si vede che f manda i raggi esterni che approdano a z_0 in altri raggi che approdano in z_0 (vedi il Lemma 3.9), in maniera bigettiva, e quindi $h : t \mapsto nt$ risulta bigettiva se ristretta a X . Inoltre f preserva l'ordine ciclico dei raggi esterni: questa proprietà ci sarà utile tra poco. Vogliamo ora mostrare che se $x \in X$, allora R_x è un raggio esterno fisso, ovvero $nx \equiv x \pmod{\mathbb{Z}}$. Supponiamo per assurdo che $nx \not\equiv x \pmod{\mathbb{Z}}$. Allora $x \not\equiv t$ (altrimenti $x \equiv t \equiv nt \equiv nx$), e

quindi $n^k x \not\equiv t$ (perché h è bigettiva in X e t ne è un punto fisso). Possiamo allora considerare la successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in $(t, t+1)$ tale che

$$x_k \equiv n^k x \pmod{\mathbb{Z}}.$$

Supporre $nx \not\equiv x$ significa supporre che $x_1 \not\equiv x_0 = x$ (supponiamo ad esempio che si abbia $x_0 < x_1$), mentre abbiamo visto che inoltre vale $n^k x \not\equiv t$, il che ci dice che in effetti $t < x_k < t+1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi abbiamo

$$t < x_0 < x_1 < t+1 .$$

Ma f preserva l'ordine ciclico dei raggi esterni, quindi applicando f ai raggi, e quindi h all'espressione precedente, si ottiene:

$$t < x_1 < x_2 < t+1 .$$

Iterando il procedimento, si vede quindi che x_k è una successione crescente: ma è limitata dall'alto, dunque converge ad un certo x , che dovrà necessariamente essere un punto fisso attrattivo per h . Ma $h : t \mapsto nt \pmod{\mathbb{Z}}$ ha solo punti fissi repulsivi: assurdo. Quindi tutti i raggi che approdano in z_0 sono raggi fissi, in particolare hanno lo stesso periodo. Inoltre $nx \equiv x$, dunque x è della forma $j/(n-1)$, e ce ne sono solo un numero finito (al più $n-1$).

Nel caso di un raggio periodico R_t , consideriamo quello che approda in z_0 di periodo minimo p , e poi applichiamo il procedimento appena visto a $g = f^{\circ p}$ anziché ad f : allora troviamo che i raggi che approdano in z_0 vengono mandati in se stessi da g , e quindi il loro periodo è $\leq p$. Ma p è stato preso minimo, e quindi il loro periodo è esattamente p . \square

Enunciamo ora un risultato, un po' più difficile da ottenere, ma sempre con le stesse tecniche applicate finora, dovuto a Douady (confronta [M, Theorem 18.11]):

Teorema 5.9. *Ogni punto periodico repulsivo o parabolico è punto di approdo di almeno un raggio esterno periodico.*

Segue allora un immediato corollario:

Corollario 5.10. *Se R_t è un raggio esterno razionale preperiodico, allora approda ad un punto z_0 preperiodico.*

Dimostrazione. Se R_t è un raggio esterno razionale preperiodico, per definizione allora $R_{n^h t}$ è periodico di un certo periodo k . Allora per il Teorema 5.7 $R_{n^h t}$ approda ad un certo punto z_0 periodico, e quindi per il Lemma 3.9 il raggio esterno R_t approda ad un certo punto preperiodico \hat{z} con $f^{\circ h}(\hat{z}) = z_0$. Supponiamo che R_t non sia periodico, e che per assurdo z_0 invece lo sia. Allora per il Teorema 5.9 esiste un raggio esterno periodico che vi approda, e quindi per il Teorema 5.8 tutti i raggi che vi approdano sono periodici dello stesso periodo: assurdo (il raggio R_t non era periodico). \square

Per mostrare l'importanza del lavoro svolto, enunciamo un risultato parallelo di questa teoria (confronta [M, Theorem 14.1]):

Teorema 5.11. *Sia $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una funzione razionale di grado $n \geq 2$. Allora l'insieme di Julia $J(f)$ coincide con la chiusura dell'insieme dei punti periodici repulsivi per f .*

Osservazione 5.12. Alla luce di quest'ultimo teorema, notiamo che ciò che abbiamo dimostrato può quindi essere applicato ad un sottoinsieme denso dell'insieme di Julia; possiamo quindi studiare il comportamento della dinamica allontanandoci dal punto periodico nell'insieme di Julia, dove il comportamento delle orbite è caotico, tramite i raggi esterni, dove grazie al Teorema 5.8 il problema diventa praticamente di combinatoria.

Bibliografia

- [A] Marco Abate. *Discrete Local Holomorphic Dynamics: Informal Notes*, Preprint. 2005.
- [B] Alan F. Beardon: **Iteration of Rational Functions**. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [F] Otto Forster: **Lectures on Riemann Surfaces**. Springer, Berlin, 1981.
- [M] John Milnor: **Dynamics in One Complex Variable: Introductory Lectures**, 2nd Edition. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000.
- [N] Raghavan Narasimhan: **Complex Analysis in One Variable**. Birkhäuser, Boston, 1985.