

Exercice 1 1. Soit E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . À quelles conditions E est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n ?

2. Le sous-ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\}$ est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 ? Justifier.

Exercice 2 1. Soit Ω un sous-ensemble de \mathbb{R} ; donner la définition de la borne supérieure de Ω .

2. Déterminer la borne supérieure de l'intervalle $]2, 3[$; justifier soigneusement.

Exercice 3 1. Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Soient u_1, u_2 et u_3 les vecteurs de \mathbb{R}^3 donnés par :

$$u_1 = (3, 2, 1), \quad u_2 = (1, -4, 2) \quad \text{et} \quad u_3 = (-1, 2, 1).$$

Rappeler ce que signifie « la famille (u_1, u_2, u_3) est libre ».

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une famille libre ?

3. Rappeler ce que signifie « la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 ».

La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de \mathbb{R}^3 ?

4. Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par u_1 et u_2 et soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par u_3 .

(a) Quelle est la dimension de E ?

(b) Quelle est la dimension de F ?

(c) Les sous-espaces E et F sont-ils supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ?

5. Donner un système d'équations cartésiennes de F .

Barème indicatif : exercice 1 (3 points), exercice 2 (4 points), exercice 3 (15 points)