Université Paris Diderot (Paris VII) — **2013-2014**
Mathématiques — **MT1–MM1**

Examen du 19 décembre 2013

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Questions de cours

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Soient $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V.
   (a) Donner la définition de « $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une famille libre ».
   (b) Donner la définition de « $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une famille génératrice de V ».
   (c) Donner la définition de « $\{u_1, \ldots, u_p\}$ est une base de V ».
2. Donner la définition de la dimension de V. Si $n = 3$, quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de V ?

Exercice 1 — Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, trois paramètres réels. On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$ donné par

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ 2x & + & 2y & - & z & = & b \\ -x & + & 3y & - & 3z & = & c \end{array}\right.$$

1. Pour quelles valeurs des paramètres a, b, c le système $(\mathcal{S})$ admet-il au moins une solution ?
2. Considérons les trois vecteurs $u_1 = (3, 2, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 3)$ et $u_3 = (2, -1, -3)$; forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 2 —

Etude d'un sous-espace vectoriel F

Soit F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$F = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F, puis calculer la dimension de F.

Etude d'un sous-espace vectoriel G

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs :

$$u_1 = (1, 5, 1),\ u_2 = (3, 1, 3) \text{ et } u_3 = (1, -1, 1).$$

On note $G = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par u_1, u_2, u_3.

3. La famille $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-elle libre ? Justifier la réponse.
4. Calculer la dimension de G. Justifier la réponse.
5. Donner un système d'équations cartésiennes caractérisant G.

Etude du sous-espace vectoriel engendré par F et G

6. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ et la famille $\{u_1, u_2, u_3\}$.
   Quel est le cardinal de $\mathcal{E}$? Est-ce que $\mathcal{E}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. La famille $\mathcal{E}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier la réponse.

Exercice 3 — On considère la fonction réelle f de la variable réelle x définie par $f(x) = x - \ln(x^4)$.

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Justifier la continuité de f sur son ensemble de définition.
3. Calculer si elle existe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité au point 0 ?
5. Sachant que $e < 4$, montrer que $f(2) < 0$. En déduire que l'équation $x = \ln(x^4)$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.
6. Justifier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée sur $]0, +\infty[$.
7. Montrer que l'équation $x = \ln(x^4)$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, 2]$.

Exercice 4 — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0; \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

1. Justifier que la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
2. f est-elle continue en 0 ? Justifier la réponse.
3. Calculer les limites suivantes, si elles existent : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Calculer la dérivée de f sur $]-\infty, 0[$ puis sur $]0, +\infty[$.
5. Calculer les dérivées à gauche et à droite en 0. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
6. Dresser le tableau de variations de f.
7. Déterminer $f(\mathbb{R})$, image directe de $\mathbb{R}$ par f. Justifier la réponse.
8. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

   On appelle f^{-1} la bijection réciproque de cette fonction.

9. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]-\infty, 0[$.
10. Calculer la dérivée de f^{-1} en $-\frac{1}{4}$.