Examen de seconde session du 16 juin 2014

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.
Toutes les réponses doivent être justifiées et la plus grande importance sera accordée à la qualité de la présentation et de la rédaction de la copie.

Exercice 1.
Les deux parties sont *indépendantes.*

1. **Racines d'un nombre complexe**
   (a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $16 + 16i\sqrt{3}$. En déduire la forme exponentielle ou trigonométrique de $16 + 16i\sqrt{3}$.
   (b) Déterminer (sous forme exponentielle ou trigonométrique) tous les nombres complexes z tels que
   $$z^5 = 16 + 16i\sqrt{3}.$$
2. **Equation de degré deux dans $\mathbb{C}$**
   Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z
   $$z^2 - (3 - i)z + 4 = 0.$$

Exercice 2.
Les différentes parties sont *indépendantes.*

1. **Sous-espaces vectoriels**
   (a) Le sous-ensemble $E = \{(3a, a + b, b + 2) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Le sous-ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left\{ \begin{array}{c} x - 3y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{array} \right. \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. **Famille libre, famille génératrice, base**
   Considérons les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, -1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $u_4 = (3, 3, 3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
   (b) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
   (c) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. **Dimension et système d'équations cartésiennes**
   Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2, -1, 0)$ et $v_2 = (3, 0, 1)$.
   (a) Donner la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Quelle est la dimension de G ?
   (c) Donner une équation cartésienne de G.

Exercice 3.
On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1} - e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Rappeler soigneusement la définition exacte de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
   En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in]c,+\infty[\quad f(x) \leqslant 1.$$
3. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :
   $$\left[\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \;\; x > 0 \end{array}\right.$$
   où y_0 est un réel que l'on précisera.
4. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0,c]$ tel que : $\forall x \in [0,c] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0,+\infty[$.
5. Montrer que $f(1) < 0$ et que $f(2) > 0$.
   (Indication : on rappelle que $e > 2$).
6. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, déduire de la question précédente que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]1,2[$.

Exercice 4.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Si oui déterminer $f'(0)$.
3. Montrer que f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.