Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 2 - Ensembles et applications

Exercice 1. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

1. si $A \subset B$ alors $A \cup C \subset B \cup C$;
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;
3. $A \subset B$ si, et seulement si, $A \cap (E \setminus B) = \emptyset$.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition d'une application injective, d'une application surjective.
2. Donner l'exemple d'une application injective non surjective, d'une application surjective non injective, d'une application ni injective, ni surjective.

Exercice 3. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des applications. Montrer :

1. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective ;
3. si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

Exercice 4. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.
2. Soient $A, B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
4. Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de E, on a $F \setminus f(A) = f(E \setminus A)$.
5. Soient $A, B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 5. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective,
   (b) pour tout $a \in X$, $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$,
   (c) pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective,
   (b) pour tout $b \in Y$, $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$,
   (c) pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 6. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. On considère les applications $\varphi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \varphi(B) = f^{-1}(B)$ et $\psi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y), \psi(A) = f(A)$.

1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective
   (b) φ est surjective
   (c) ψ est injective
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective
   (b) φ est injective
   (c) ψ est surjective

Exercice 7. Soit E un ensemble ; pour toute partie A de E, on note $\varphi_A : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cap A$ et $\phi_A : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cup A$.

1. Montrer que φ_A est injective si, et seulement si, φ_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.
2. Montrer que ϕ_A est injective si, et seulement si, ϕ_A est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.

Exercice 8. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.

On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto az^2 + bz + c$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Déterminer pour quelles valeurs de $a, b, c \in \mathbb{C}$ l'application f est injective / surjective / bijective.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{i}{z}$.

1. Démontrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$.
2. Calculer l'ensemble des points invariants de f, c'est-à-dire l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
3. Soit $C_r = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon r. Calculer $f(C_r)$. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 10. On considère les applications $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 2z + i$ et $g(z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z + 3$.

1. Déterminer si f définit une rotation / une homothétie, et calculer le centre et l'angle / le rapport de f dans le cas échéant.
2. Déterminer les ensembles des points invariants des applications $u = f \circ g$ et $v = g \circ f$. L'application u est-elle une rotation / une homothétie ? Même question pour v.

Exercice 11. Si E est un ensemble fini à n éléments, montrer par récurrence sur n que l'ensemble de ses parties est un ensemble fini à 2^n éléments.

Exercice 12. Soient A, B, C des ensembles finis. Montrer que $A \cup B \cup C$ est fini et que l'on a

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C).$$

Exercice 13. Établir la version quantitative suivante du principe des tiroirs : si $f : E \to F$ est une application entre deux ensembles finis avec $\#E = n > r = \#F$, alors il existe $a \in F$ tel que $\#f^{-1}(\{a\}) \geq \frac{n}{r}$.

Exercice 14. Soit E un ensemble fini. On note $\mathrm{Bij}(E, E)$ l'ensemble des bijections de E dans E. Par induction sur $n = \#E$, montrer que $\#\mathrm{Bij}(E, E) = n!$.

Exercice 15. Soient E, F deux ensembles finis. On note $m = \#E$ (resp. $n = \#F$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Déterminer le nombre d'injections de E dans F. Puis déterminer le nombre de bijections de E sur F.