Université Paris-Diderot Année 2013-2014
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 3 - Algèbre linéaire

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$;
(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$;
(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$;
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$;
(f) $F = \{(t, 4t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$;
(g) $G = \{(u + v, u - v) \,|\, u,\, v \in \mathbb{R}\}$;
(h) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 3\}$;
(i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$;
(j) $J = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}\right\}$;
(k) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 3z = 0\}$;
(l) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, xy = 0\}$;
(m) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}\right\}$;
(n) $N = \{(u, 3v, v - u) \,|\, u,\, v \in \mathbb{R}\}$;
(o) $O = \{(u + 1, 3v, v - u) \,|\, u,\, v \in \mathbb{R}\}$;
(p) $P = \{(u + v, 2u, v - 4u) \,|\, u,\, v \in \mathbb{R}\}$;
(q) $Q = \{(-u, v, u + 3v) \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$.
(r) $R = \{(1 + u, -v, 2u + v + 2) \,|\, u, v \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. A quelle condition $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x + y + z + t = 0\} \quad \& \quad F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = y = z = t\}.$$

(a) Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer des bases de E et de F.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (2,1,1)$ et $v_2 = (2,2,1)$, $w_1 = (1,2,-1)$ et $w_2 = (2,1,2)$.

(a) Déterminer la dimension de $E_1 \cap E_2$.

(b) Déterminer la dimension de $E_1 + E_2$.

(c) A-t-on : $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$?

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels $E_1 = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(w_1, w_2)$ avec $v_1 = (1,-1,0,1)$ et $v_2 = (0,2,1,0)$, $w_1 = (0,6,-1,4)$ et $w_2 = (3,3,1,5)$.

(a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.

(b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

(c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1,-2,3)$ et $w = (2,-4,m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 9. Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (3,3,10)$, $a_2 = (0,3,4)$ et $a_3 = (1,0,2)$;

(b) $B = \text{Vect}(b_1, b_2)$ où $b_1 = (1,0,0)$ et $b_2 = (0,1,1)$;

(c) $C = \{(2t+u, -u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$;

(d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$;

(e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \;\text{ et }\; 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 10. Comparaison de deux sous-espaces.

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$$v_1 = (1,-1,3,2),\; v_2 = (3,-1,0,1),\; v_3 = (1,1,-6,-3),\; v_4 = (0,2,-9,-5).$$

On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

(c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 11. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique (e_1, e_2, e_3), les sous-espaces E et F suivants sont-ils supplémentaires ?

(a) $E = \{(x,y,z) \mid x = y = z\}$ et $F = \text{Vect}(e_1, e_2)$.

(b) $E = \{(3t, 3t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(2u+v, u+2v, u) \mid u \in \mathbb{R},\, v \in \mathbb{R}\}$.

(c) $E = \{(2u+v, u+2v, u+v) \mid u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(u+v, u+v, 2u) \mid u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}\}$.