Université Paris-Diderot — Année 2013-2014

MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I

Feuille de TD 6 - Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$, (b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$, (c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,
(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, (e) $f(x) = x - |x|$, (f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,
(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$, (h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$, (i) $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$,
(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 2. Dans un pays lointain et exotique, l'impôt sur le revenu est défini de la façon suivante :
– Il n'y a pas d'impôt pour un revenu annuel inférieur à 10000 euros.
– Tout revenu annuel supérieur à 10000 euros et inférieur à 20000 euros est taxé à dix pour cent.
– Au delà de 20000 euros, le revenu est taxé à 15 %.

1) Dessiner le graphe de la fonction qui indique le taux de taxation en fonction du revenu.
2) A combien se monte l'impôt sur un revenu de 14000 euros ? et de 26000 euros ?
3) Dessiner le graphe de la fonction de la fonction qui indique l'impôt à payer en fonction du revenu.

Exercice 3. On vous offre un emploi en CDD d'un mois. A la signature du contrat, vous avez le choix entre deux formules pour être payé(e) :
– Recevoir un million d'euros à la fin du mois.
– Recevoir 1 centime le premier jour, et chaque jour, le double du salaire de la veille.
Laquelle choisissez vous ?

Exercice 4. Représentez graphiquement , dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

1) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.
2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2^+$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 5. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

1) $\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b)$, 2) $\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)$,
3) $\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}(a)+\mathrm{th}(b)}{1+\mathrm{th}(a)\mathrm{th}(b)}$, 4) $\mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(a+b) + \frac{1}{2}\mathrm{ch}(a-b)$,
5) $\mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b) = \frac{1}{2}\mathrm{ch}(a+b) - \frac{1}{2}\mathrm{ch}(a-b)$, 6) $\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) = \frac{1}{2}\mathrm{sh}(a+b) + \frac{1}{2}\mathrm{sh}(a-b)$,
7) $\mathrm{sh}(p) + \mathrm{sh}(q) = 2\mathrm{sh}(\frac{p+q}{2})\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2})$, 8) $\mathrm{sh}(p) - \mathrm{sh}(q) = 2\mathrm{sh}(\frac{p-q}{2})\mathrm{ch}(\frac{p+q}{2})$,
9) $\mathrm{ch}(p) + \mathrm{ch}(q) = 2\mathrm{ch}(\frac{p+q}{2})\mathrm{ch}(\frac{p-q}{2})$, 10) $\mathrm{ch}(p) - \mathrm{ch}(q) = 2\mathrm{sh}(\frac{p+q}{2})\mathrm{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Exercice 6. Étudier les fonctions $f(x) = x^2 - x^{3/2}$ et $g(x) = 3^x - 2^x$ et dessiner leur graphe.

Exercice 7. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

1) $\lim_{x\to 0} x^2-2x$, 2) $\lim_{x\to 1} x^2-4x+3$, 3) $\lim_{x\to 2} x^2-2x$,

4) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}\cdot$, 5) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$, 6) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{2x^2+3}$,

7) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$, 8) $\lim_{x\to +\infty} 1+x+\ln x$, 9) $\lim_{x\to +\infty} x^4e^x\ln^2 x$,

10) $\lim_{x\to +\infty} xe^{\frac{1}{x}}$, 11) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x^4-1}$, 12) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

13) $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x^2-1)(x+2)}$, 14) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-frac1(x-1)^2}\right)$, 15) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

16) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, 17) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x^2}+x}{\sin x}$, 18) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

19) $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$, 20) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, 21) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

22) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+2}\cdot$, 23) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}\cdot$, 24) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{x-1}\cdot$,

25) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-x}{x+2}\cdot$, 26) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2}{x^3+1}\cdot$, 27) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sin x}{x^2+1}$,

28) $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$, 29) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$, 30) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{\ln x-1}$,

31) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(xe^x)}{x}$, 32) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$, 33) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$,

34) $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$, 35) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{e^x+\ln x}+x^{2/3}$, 36) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

37) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\sqrt{x}+x^6}{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}+\ln\sqrt{x}$, 38) $\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x^2e^x\right)$, 39) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{(\sin(\arctan x)-1)}}}$,

40) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, 41) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x-1}$, 42) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$,

43) $\lim_{x\to 0^+} \ln xe^{-\frac{1}{x}}$, 44) $\lim_{x\to 0^+} x^x$. 45) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

46) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$, 47) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{5x-1}\frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$, 48) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

49) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$, 50) $\lim_{x\to 1}(x^2-3x+2)\ln(x-1)$,

51) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x+3x^2\ln(\ln x)+2x\ln x}{x^{\frac{5}{2}}}$, 52) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{\ln x+1}}{\sqrt{\ln x}}+\frac{\ln^3 x-\ln x}{(\ln x+1)^3}$,

53) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,

54) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x^6\sqrt{x}-\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}+2x^7-\sqrt{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)^4}{\sqrt{\left(\left(x^5\right)^2+2x^{16}-11\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^3}}$,

55) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xe^{2x}-x(1+\ln x)-x^7}{e^{\frac{1}{x}}-\sin x+x^2}$,

56) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{\frac{x^2-x}{\sqrt{x}-x}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x\sqrt{x}-3}}}{\ln\left(\dfrac{x^2+x}{x-1}\right)}$,

57) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan\dfrac{x}{x^2+1}}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2-x^2}$,

58) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(3xe^{-x}+2\ln x^2-7x^3)e^x}{(xe^x+3x+2)(5e^{-x}+e^{-x^2})}$,

59) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}+e^x+x^7+8x+x\ln x+(\ln x)^2}{\sqrt{e^{2x^2}+1}}$.

Exercice 8. Vrai-Faux

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

1) Si f est une fonction, alors $f(s+t)=f(s)+f(t)$.
2) Si f est une fonction alors si $f(s)=f(t)$, on a $s=t$.
3) Si f est une fonction, $f(2x)=2f(x)$.
4) Si $x_1<x_2$ et f est une fonction strictement décroissante, alors $f(x_1)>f(x_2)$.
5) Une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point.
6) Si f et g sont des fonctions, alors $f\circ g=g\circ f$.
7) Si f est injective et ne s'annule pas, f est de signe constant.
8) Si f est injective et ne s'annule pas, alors $f^{-1}(x)=\frac{1}{f(x)}$.
9) Si $x>0$, alors $(\ln(x))^6=6\ln(x)$.
10) Si $x>0$ et $a>1$, alors $\log_a(x)=\ln(\frac{x}{a})$.