Université Paris Diderot (Paris VII) **2013-2014**
Mathématiques **MM1**

TD n° 8
Fonctions continues et dérivables

Exercice 1 — Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer en utilisant la définition que :

1. $|f|$ est continue,
2. la réciproque est-elle vraie, *i.e.* si $|f|$ est continue, alors f est-elle continue ?
3. $\sup(f, g)$ est continue.

Exercice 2 — Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est identiquement nulle. Décrire f.

Exercice 3 — Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 4 — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 4], \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in]4, +\infty[. \end{cases}$$

1. Montrer que f est strictement croissante.
2. Tracer le graphe de la fonction f.
3. f est-elle continue ?
4. Montrer que f est bijective.
5. Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 5 — On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot (\sin(1/x) + 2) & \text{si } 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
2. Trouver explicitement pour un $\varepsilon > 0$ donné, un $\delta > 0$ pour lequel on ait :

$$\forall x_1, x_2 \in [0, 1] \;:\; |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Exercice 6 —

1. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?
2. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 7 — Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante ; puis montrer que pour tout $y \in]-1, 1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 8 — On considère la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

1. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. Rappeler la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$.
   En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]c, +\infty[\quad f(x) \leqslant 1$.
3. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x > 0 \end{array} \right.$$

   où y_0 est un réel que l'on précisera.
4. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, c]$ tel que : $\forall x \in [0, c] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que $f(2) > 0$. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2]$.

Exercice 9 — Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

1) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$	2) $\frac{e^x}{1+x}$	3) $\frac{ax+b}{cx+d}$
4) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$	5) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$	6) x^x
7) $e^{a\tan(x)}$	8) $\sin(\sin(\sin x))$	9) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$
10) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$	11) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$	12) x^{x^x}

Exercice 10 —

1. Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la valeur de la fonction.

1) $\cos(\arccos(x))$	2) $\sin(\arcsin(x))$	3) $\tan(\arctan(x))$
4) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$	5) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$	6) $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x))$
7) $\arccos(\cos(x))$	8) $\arcsin(\sin(x))$	9) $\arctan(\tan(x))$
10) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$	11) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$	12) $\mathrm{argth}(\mathrm{th}(x))$

2. Calculer les dérivées des fonctions $\arccos(x), \arcsin(x), \arctan(x), \mathrm{argch}(x), \mathrm{argsh}(x), \mathrm{argth}(x)$.
3. Calculer, pour tout $x \neq 0$ la valeur de la fonction $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

Exercice 11 — Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes.

1) $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh} x) = \sqrt{x^2 + 1}$	2) $\mathrm{sh}(\mathrm{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3) $\mathrm{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	4) $\mathrm{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Exercice 12 — Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a

$$\left| 1 - \frac{x^2}{2} - \cos(x) \right| \leqslant \frac{x^4}{24}$$

Exercice 13 — Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 14 — Fonctions circulaires réciproques.

1. Rappeler la définition des fonctions réciproques arctan, arcsin et arccos. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable, calculer les fonctions dérivées de arctan, arcsin et arccos.
2. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a
$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$
3. Calculer
$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 15 — Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

1. Etudier la continuité de f.
2. Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.
3. Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.
4. Montrer que
$$\forall x > 1, \quad \arctan \frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{4} + \arctan x.$$

Exercice 16 — Soit $I =]a, b[$ avec $a < b$. Considérons $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable (c'est-à-dire dérivable et dont la fonction dérivée est elle-même dérivable) telle que
$$\forall x \in I, \quad f'(x) \neq 0.$$

1. Montrer que f est strictement monotone sur $]a, b[$. En déduire $f(]a, b[)$.
2. On note $J = f(]a, b[)$. Montrer que f réalise une bijection de I sur J.
3. Montrer que la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est deux fois dérivable et calculer ses dérivées première et seconde.

Exercice 17 — Soient $a < b$ deux réels, on considère une fonction f deux fois continument dérivable sur $[a, b]$, c'est-à-dire que f est deux fois dérivable et ses dérivées f' et f'' sont continues.
On veut montrer la propriété suivante :
$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que : } \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c) \tag{1}$$

Pour montrer cette propriété, on pose, pour tout $x \in [a, b]$:
$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{8} A$$

avec A un réel.

1. Calculer $\varphi(a)$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout $x \in [a, b]$.
2. Montrer que l'on peut choisir A tel que $\varphi(b) = 0$. (Dans la suite, on suppose donc que le réel A est choisi tel que $\varphi(b) = 0$.)
3. Après avoir énoncé soigneusement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$.

4. Après avoir énoncé soigneusement le théorème des accroissements finis, appliquer-le à la fonction f', sur l'intervalle $[\frac{a+\xi}{2}, \xi]$, et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f''(c)$.
5. Enfin, montrer que la propriété (1) est vérifiée.

Exercice 18 — Déterminer les extrema locaux et globaux sur l'intervalle I pour la fonction f dans les cas suivants :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \text{ et } I = [2,4]; & b) f(x) = x\sqrt{1-x} \text{ et } I = [-1,1]; \\ c) f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1} \text{ et } I = [-2,2]; & d) f(x) = (x^2+2x)^3 \text{ et } I = [-2,1]; \\ e) f(x) = x + \sin(2x) \text{ et } I = [0,\pi]; & f) f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2} \text{ et } I = [1,3]. \end{array}$$

Exercice 19 — Calculer les limites suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1)\ \lim\limits_{1} \dfrac{x^b-1}{x^a-1}; & 2)\ \lim\limits_{0} \dfrac{\sin(4x)}{\tan(5x)}; & 3)\ \lim\limits_{0} \dfrac{\mathrm{sh}(4x)}{\mathrm{th}(5x)}; \\ 4)\ \lim\limits_{0} \dfrac{e^{3x}-1}{x}; & 5)\ \lim\limits_{0} \dfrac{e^x-1}{x^3}; & 6)\ \lim\limits_{+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}; \\ 7)\ \lim\limits_{0} \dfrac{5^x-3^x}{x}; & 8)\ \lim\limits_{0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}; & 9)\ \lim\limits_{1} \dfrac{\ln x}{\sin(\pi x)}; \\ 10)\ \lim\limits_{1} \dfrac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x-e)}; & 11)\ \lim\limits_{0} \dfrac{\cos(x)-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}; & 12)\ \lim\limits_{0} \dfrac{\tan(x)-x}{x^3}; \\ 13)\ \lim\limits_{+\infty} \sqrt{x^2+x}-x; & 14)\ \lim\limits_{1} \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}; & 15)\ \lim\limits_{+\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}. \end{array}$$

Exercice 20 — **Vrai-Faux**

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

1. Si $f(-1) = f(1)$ alors il existe c qui vérifie $f'(c) = 0$ et $|c| < 1$.
2. Si $f'(x) < 0$ sur $]1,6[$, alors f est strictement décroissante sur $]1,6[$.
3. Si $f(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{0} f(x) = \ell$, alors $\ell > 1$.
4. Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f+g$ est croissante sur I.
5. Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f-g$ est monotone sur I.
6. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
7. Si $f'(c) = 0$ alors f admet un extrémum local au point c.
8. Si f admet un extrémum local au point c, alors $f'(c) = 0$.
9. Si f est continue sur $]a,b[$ alors f admet un minimum et un maximum globaux dans $]a,b[$.
10. On a, grâce à la règle de l'Hospital, $\lim\limits_{\pi^-} \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)} = \lim\limits_{\pi^-} \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\infty$.