Université Paris-Diderot
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II

Année 2013-2014
L1 MASS-2

DM 08 - Corrigé

La numérotation des exercices suit celle de la feuille de TD 11.

Exercice 3. Exprimer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples (et en calculer une primitive).

(h) $\dfrac{x^3 - 2x + 1}{(x-1)^3(x+1)}$.

Solution. En premier, notons que le degré du numérateur $p(x) = x^3 - 2x + 1$ est strictement inférieur au degré du dénominateur $q(x) = (x-1)^3(x+1)$. Par contre, on peut remarquer que $(x-1)$ divide $p(x)$, car $p(1) = 1 - 2 + 1 = 0$. En faisant la division éuclidienne de $p(x)$ par $x - 1$, on obtient

$$\begin{array}{rrrrr|lll}
 & x^3 & & -2x & +1 & x & -1 & \\
\cline{6-8}
- & x^3 & -x^2 & & & & & \\
\cline{2-3}
= & & x^2 & -2x & +1 & x^2 & +x & -1 \\
& - & x^2 & -x & & & & \\
\cline{3-4}
& = & & -x & +1 & & & \\
& & - & -x & +1 & & & \\
\cline{4-5}
& & = & & 0 & & &
\end{array}$$

Donc on peut simplifier la fraction rationnelle et obtenir :

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x+1)}.$$

On veut maintenant trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}.$$

- Si on multiplie les deux expressions par $(x+1)$ et on évalue en $x = -1$, on obtient

$$\left.\frac{x^2 + x - 1}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{a(x+1)}{x-1}\right|_{x=-1} + \left.\frac{b(x+1)}{(x-1)^2}\right|_{x=-1} + c$$
$$\Rightarrow c = \frac{1 - 1 - 1}{(-1-1)^2} = \frac{-1}{4}.$$

- On va multiplier les deux expressions par $(x-1)^2$, et on obtient

$$\frac{x^2 + x - 1}{x+1} = b + a(x-1) + c\frac{(x-1)^2}{x+1}.$$

  On considère maintenant le DL à l'ordre 1 en 1. Si $t = x - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
b + at + o(t) &= \frac{(t+1)^2 + (t+1) - 1}{t+2} \\
&= \frac{t^2 + 3t + 1}{2(1 + \frac{t}{2})} \\
&= \frac{1}{2}\big(1 + 3t + o(t)\big)\big(1 - \frac{t}{2} + o(t)\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(1 + \frac{5}{2}t + o(t)\big).
\end{aligned}$$

  On en déduit $b = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{5}{4}$.

Donc la décomposition en éléments simples est donnée par

$$\frac{x^3-2x+1}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{\frac{5}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1}.$$

Si on veut en calculer une primitive, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3-2x+1}{(x-1)^3(x+1)}\,dx &= \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{5}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + k(x),\end{aligned}$$

où $k(x)$ est une fonction localement constante, définie en $\mathbb{R}\setminus\{+1,-1\}$. Donc :

$$k(x) = \begin{cases} k_1 & x \in]-\infty,-1[\\ k_2 & x \in]-1,1[\\ k_3 & x \in]1,+\infty[\end{cases},$$

avec $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$.

Remarque. On aurait pu calculer la décomposition en éléments simples directement sans la simplification par $(x-1)$. Dans ce cas, il faut procéder de façon analogue, avec un DL à l'ordre 2.

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes :

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}dx$, (k) $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$.

Solution. (j) On fait la substitution $y=\ln(x)$, et on obtient $dy = \frac{1}{x}dx$. Donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin(y) + c = \arcsin(\ln(x)) + c.$$

Ici, c est une fonction localement constante définie sur le domaine de $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$. Dans ce cas, $\mathcal{D}_f = \{x>0\} \cap \{-1<\ln(x)<1\} =]e^{-1}, e[$, et c est une constante car le domaine est un intervalle.

(k) On fait la substitution $y=e^{2x}$, et on obtient $dy = 2e^{2x}dx = 2y dx$. Donc

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dy}{2y(1+y)}.$$

On decompose en éléments simples et on obtient

$$\frac{1}{2y(1+y)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{1+y},$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.

- On multiplie par y l'équation, et on évalue en $y=0$, on obtenant

$$a = \left.\frac{1}{2(1+y)}\right|_{y=0} = \frac{1}{2}.$$

- On multiplie par $y+1$ l'équation, et on évalue en $y=-1$, on obtenant

$$b = \left.\frac{1}{2y}\right|_{y=-1} = -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dy}{2y(1+y)} = \frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|y+1|\right) + c = \frac{1}{2}\left(\ln\left|e^{2x}\right| - \ln(1+e^{2x})\right) + c = x - \ln\sqrt{1+e^{2x}} + c.$$

Notons que le domaine de la fonction à intégrer est $\mathbb{R}$, et donc c est une constante.

Remarque. On aurait aussi pu proceder comme il suit :

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = \int dx - \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+y} = x - \frac{1}{2}\ln|1+y| + c = x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c,$$

où comme d'abord $y = e^{2x}$.

Exercice 7. Calculer les intégrales suivants :

(e) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx,$ (h) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$

Solution. (e) On fait la substitution $y = \arcsin x$, qui nous donne $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Donc On remarque que la fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est une bijection de $[-1,1]$ à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. L'intervalle d'intégration $[0, \frac{1}{2}]$ est bien contenu dans le domaine de définition de l'arcsin. De plus, $\arcsin(0) = 0$ et $\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Avec cette substitution on obtient

$$\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^4}{4\cdot 6^4}.$$

(h) On peut remarquer que si $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, alors $y = f(x)$ est le semi-cercle supérieure de centre $(0,0)$ et rayon 1. Donc l'intégrale propre à calculer vaut l'aire d'un demi-cercle de rayon 1, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$. On va calculer cet intégrale analytiquement. On fait la substitution $x = \sin t$, d'où on obtient $dx = \cos t dt$. Remarquons que la fonction $t \mapsto \sin t$ est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ à $[-1,1]$. Comme $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, on obtient

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt,$$

où on a utilisé $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = |\cos(t)| = \cos(t)$ car $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. On fait la substitution $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, et on a

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \left(-\frac{\pi}{2} + 0\right)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13. Calculer les primitives suivantes.

(b) $\displaystyle\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx.$

Solution. D'abord on utilise la formule $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. Puis on applique la substitution $y = \sin x$, $dy = \cos x dx$. On obtient

$$\begin{aligned}\int \cos^5(x)\sin^2(x)\,dx &= \int \cos x(1-\sin^2(x))^2\sin(x)^2 dx\\ &= \int (1-y^2)^2 y^2 dy = \int (y^2 - 2y^4 + y^6)dy\\ &= \frac{y^3}{3} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + c\\ &= \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{2\sin^5(x)}{5} + \frac{\sin^7(x)}{7} + c,\end{aligned}$$

où c est une constante.

Exercice 14. Calculer les primitives suivantes.

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx.$

Solution.

- *Méthode 1* : On s'aperçoit que le numérateur est la dérivée du dénominateur. On en déduit que
$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \ln(e^x + e^{-x} + c,$$
où c est une constante.

- *Méthode 2* : On s'aperçoit que $e^x + e^{-x} = 2\cosh(x)$ et $e^x - e^{-x} = 2\sinh(x)$. On en déduit que
$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\, dx = \ln(\cosh(x)) + c',$$
où c' est une constante. Notons que $\ln(\cosh(x)) = \ln(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln 2$, donc les deux solutions trouvés différent par la constante $\ln 2$.

- *Méthode 3* : On multiplie numérateur et dénominateur par e^x, et on fait la substitution $y = e^{2x}$, $dy = 2ydx$. On obtient
$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}\, dx = \int \frac{y-1}{2y(y+1)}\, dy.$$
On décompose en éléments simples :
$$\frac{y-1}{2y(y+1)} = \frac{a}{y} + \frac{b}{y+1}.$$
En multipliant par y et évaluant en $y = 0$, on obtient $a = -\frac{1}{2}$.
En multipliant par $y+1$ et évaluant en $y = -1$, on obtient $b = \frac{-1-1}{-2} = 1$. On en déduit
$$\int \frac{y-1}{2y(y+1)}\, dy = \frac{-1}{2}\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dy}{y+1} = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|1+y| + c'' = -x + \ln(1+e^{2x}) + c'',$$
où c'' est une constante. Notons que $-x + \ln(1+e^{2x}) = \ln(e^{-x}) + \ln(1+e^{2x}) = \ln(e^{-x} + e^x)$, et cette solution coïncide avec celle obtenue avec la méthode 1.

Exercice 18. Calculer les intégrales impropres suivants.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} e^t\, dt.$

Solution. Par définition, on a
$$\int_{-\infty}^{2} e^t\, dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^2 e^t dt = \lim_{x\to-\infty}[e^t]_x^2 = e^2 - \lim_{x\to-\infty} e^x = e^2.$$