Dévoir surveillé 1 : corrigé

18 février 2014

Question du cours. Donner la définition de rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Reponse. Le rang de la matrice A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses colonnes : pour tout $j = 1, \dots, n$, notons par $v_j = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j}) \in \mathbb{R}^m$ la j-ième colonne de A. Alors $\operatorname{rang}(A) = \dim \operatorname{Vect}\{v_1, \dots, v_n\}$.
Par un théorème vu au cours, le rang de A est aussi égal à la dimension de l'espace engendré par les lignes de A.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, x + y - z = 0 \text{ et } y - t = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad E_2 = \operatorname{Vect}(v_1, v_2),$$

avec $v_1 = (1, 1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 2, 2, 1)$.

(a) Donner une base de $E_1 \cap E_2$.

(b) Donner une base de $E_1 + E_2$.

(c) Déterminer un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$.

Reponse.

(a) D'abord, on trouve un système d'équations caractérisant E_2.

Méthode 1. Considerons une équation de la forme $ax + by + cz + dt = 0$, et imposons que v_1 et v_2 satisfont cette équation. On obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 2b + 2c + d = 0 \end{cases}.$$

En forme matriciale, on a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Le système est déjà en forme échelonnée, avec deux pivots dans les premières deux colonnes.

$d \in \mathbb{R}$ est un paramètre libre.

$c \in \mathbb{R}$ est un paramètre libre.

$b = -c - d/2$.

$a = -b - 2c = -c + d/2$.

En fixant $(c,d) = (1,0)$ et $(c,d) = (0,2)$ (une base pour l'espace des paramètres), on obtient

$$E_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{cases} \right\}. \tag{1}$$

Méthode 2. On veut déterminer l'espace engendré par v_1 et v_2, c'est-à-dire, quels vecteurs $v = (x,y,z,t)$ peuvent s'écrire dans la forme $v = \lambda v_1 + \mu v_2$. Il faut donc trouver pour quels valeurs de x,y,z,t le système :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 2 & z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right)$$

admet (au moins) une solution. On applique l'algorithme de Gauss, et on obtient

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 2 & y \\ 2 & 2 & z \\ 0 & 1 & t \end{array} \right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & y - x - 2t \\ 0 & 0 & z - 2x - 2t \end{array} \right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_4 \\ L_2 - L_1 - 2L_4 \\ L_3 - 2L_1 - 2L_4 \end{array} .$$

Ce système admet solution si et seulement si les deux équations $y - x - 2t = 0$ et $z - 2x - 2t = 0$ sont vérifiées. Donc

$$E_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} -x + y - 2t = 0 \\ -2x + z - 2t = 0 \end{cases} \right\}. \tag{2}$$

Remarque. Notons que la première équation de (1) une combinaison linéaire des équations de (2) : $-x - y + z = (-2z + z - 2t) - (-x + y - 2t)$. De même, la déuxième équation de (1) est l'opposée de la première équation de (2). Il s'en suit que les deux systèmes trouvés avec les deux méthodes différentes identifient le même sous-éspace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

Des calculs précédents, il s'en suit que

$$E_1 \cap E_2 = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - t = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x - y + 2t = 0 \end{cases} \right\}.$$

Notons que les première et troisième équations sont l'une l'opposé de l'autre, donc on peut effacer par exemple la troisième équation. On trouve maintenant une base pour $E_1 \cap E_2$. Il faut donc resoutre le système qui définit $E_1 \cap E_2$. En notation matriciale :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

On change l'ordre des inconnues en considerant (z,x,y,t) et les lignes en considerant (L_1, L_3, L_2), et on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

De cette façon le système est échelonné, avec le paramètre libre $t \in \mathbb{R}$. On obtient

$t \in \mathbb{R}$ paramètre libre.

$y = t$.

$x = y - 2t = -t$.

$z = x + y = t - t = 0$.

Donc, pour $t = 1$, on obtient $E_1 \cap E_2 = \text{Vect}\{w\}$, avec $w = (-1, 1, 0, 1)$ qui forme donc une base de $E_1 \cap E_2$. En particulier, $\dim(E_1 \cap E_2) = 1$.

(b) D'abord, trouvons une base de E_1. Il faut resoudre le système caractérisant E_1. En notation matriciale :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right),$$

qui est déjà en forme échelonnée. On obtient

$t \in \mathbb{R}$ paramètre libre.

$z \in \mathbb{R}$ paramètre libre.

$y = t$.

$x = -y + z = z - t$.

En considerant $(z, t) = (1, 0)$ et $(z, t) = (0, 1)$ (une base pour l'espace des paramètres, on obtient que $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$, avec $u_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $u_2 = (-1, 1, 0, 1)$ qui forment une base de E_1. Notons que $u_2 = w$ est dans $E_1 \cap E_2$.

Or, par la formule de Grassmann, on a que $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

On sait que les vecteurs $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ forment une famille génératrice de $E_1 + E_2$. Pour trouver une base, il faut extraire une famille libre maximale (de trois vecteurs). Une façon pour le faire est la suivante. On a $E_1 = \text{Vect}(u_1, u_2)$. De plus, ni v_1 ni v_2 sont multiples de w donc ils n'apartient pas à $E_1 \cap E_2$, et par exemple $\text{Vect}(u_1, u_2, v_1)$ est un espace de dimension 3 dans $E_1 + E_2$. Comme $\dim(E_1 \cap E_2) = 3$, on en déduit que (u_1, u_2, v_1) forme une base de $E_1 + E_2$.

On aurait pu aussi trouver les pivots du système linéaire homogène suivant

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Notons que l'équations $x + y - z = 0$ est satisfaite par les vecteurs de E_1 et E_2 au même temps. Donc $E_1 + E_2 \subseteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0\}$. Comme la dimension de ces deux espaces vectoriels est la même (égal à 3), on a égalité.

Pour trouver un supplementaire de $E_1 + E_2$ dans $\mathbb{R}^4$, il suffit trouver un vecteur $e \notin E_1 + E_2$, donc un vecteur e qui ne satisfait pas l'équation $x + y - z = 0$. Le vecteur $e = e_1 = (1, 0, 0, 0)$ a cette propriété, et $F = \text{Vect}(e_1)$ est un supplementaire de $E_1 + E_2$.

Exercice 2. Soit

$$A_m := \begin{pmatrix} 1 & m & 2m+1 \\ -2 & 2 & m+3 \\ m & 1 & m+2 \end{pmatrix}$$

(a) Discuter quel est le rang de A_m selon les valeurs du réel m.

(b) Pour quelles valeurs de m est A_m inversible ?

(c) Pour $m = 0$, donner l'inverse de A_0.

Reponse.

(b) On calcule le déterminant de A_m. En développant sur la première ligne, on obtient.

$$\begin{aligned} \det(A_m) &= 1 \begin{vmatrix} 2 & m+3 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} m & 2m+1 \\ 1 & m+2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} m & 2m+1 \\ 2 & m+3 \end{vmatrix} \\ &= 2m + 4 - m - 3 + 2m^2 + 4m - 4m - 2 + m^3 + 3m^2 - 4m^2 - 2m \\ &= m^3 + m^2 - m - 1 = (m^2 - 1)(m + 1) = (m + 1)^2(m - 1). \end{aligned}$$

Donc A_m est inversible si et seulement si $\det A_m \neq 0$ si et seulement si $m \neq 1, -1$.

(a) Le rang de A_m est 3 si et seulement si A_m est inversible, si et seulement si $m \neq 1, -1$.
Si $m = 1$, on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On voit que les première et troisième lignes de A_1 sont égaux ; les première et deuxième lignes de A_1 sont linéairement indépendents. Il s'en suit que la dimension de l'espace engendré par les lignes de A_1, et donc le rang de A_1, est égal à 2.
Si $m = -1$, on a

$$A_{-1} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit que les très lignes de A_{-1} sont l'une un multiple de l'autre. On en déduit que rang $A_{-1} = 1$.

(c) On sait que pour $m = 0$ la matrice A_0 est inversible. On a

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1. On applique l'algorithme de Gauss pour trouver l'inverse de A_0.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 + 2L_1 - 2L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2L_3 \\ L_3 \end{array}.$$

Donc, on a

$$A_0^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2. On applique la méthode des cofacteurs.

$$\mathrm{Cof}(A_0) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det A_0 = (0+1)^2(0-1) = -1$, on en déduit

$$A_0^{-1} = \frac{1}{\det A_0}\, {}^t\mathrm{Cof}(A_0) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$