

## Dévoir surveillé 2

8 avril 2014

### Question du cours.

Soit  $p(x) \in \mathbb{R}[x]$  un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $p'(x)$  sa dérivée et  $p''(x)$  la deuxième dérivée.

Donner une condition pour que  $a \in \mathbb{R}$  soit une racine double de  $p(x)$ .

### Exercice 1.

(a) Donner le développement limité en 0 de  $\cos(x)$  et  $\sin(x)$  à ordre 5.

(b) En utilisant que  $x^3 \cotan(x) = \frac{x^3 \cos(x)}{\sin(x)}$ , donner le développement limité de  $x^3 \cotan(x)$  en 0 à l'ordre 6.

Considérer la courbe

$$\gamma(t) = \left( t \ln \left( \frac{1}{1-t} \right), t^3 \cotan(t) \right).$$

(c) Étudier le domaine de définition de  $\gamma$ .

(d) Quel est le comportement de la courbe près de  $t = 1$  ?

(e) Montrer que  $t = 0$  est un point singulier. Quel est son type ?

### Exercice 2. Soit

$$f(x) = x \cosh(x) - \sinh(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Calculer les dérivées de  $f$  jusqu'à l'ordre 4.

(b) Montrer que  $f^{(5)}(x) = x \sinh(x) + 4 \cosh(x)$ .

(c) Énoncer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4.

(d) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$  on a

$$\frac{x^3}{3} \leq x \cosh(x) - \sinh(x) \leq \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15}.$$

(Indication : utiliser que  $5e + \frac{3}{e} < 16$ .)