Université Paris-Diderot | Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II | L1 MASS-2

Feuille de TD 2 - Espaces vectoriels

Questions du cours. Soit $(V, +, \cdot)$ un espace vectoriel (par exemple, $V = \mathbb{R}^n$).

(a) Sous quelles conditions un sous-ensemble $E \subseteq V$ est un sous-espace vectoriel de V ?

(b) Donner la définition de combinaison linéaire d'éléments dans V.

(c) Donner la définition d'une famille libre dans V.

(d) Donner la définition d'une famille géneratrice dans V.

(e) Donner la définition d'une base de V.

(f) Donner la définition d'espace engendré par une famille $\mathcal{A} \subseteq V$.

(g) Donner la définition de dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(h) Quelles valeurs peut avoir la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 4$, indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

(a) $\{(\alpha, 0, 2\alpha + \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(b) $\{(\alpha + 1, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(\alpha + \gamma, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\{(\beta - 2\alpha, \alpha + 1, \beta + 2) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = 0\}$.

(f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y - 2z = 3\}$.

(g) $\left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; \left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned} \right. \right\}$.

(h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \geq 0\}$.

(i) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$.

(j) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad = bc\}$.

(k) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 3z - x\}$.

(l) $\emptyset \subset \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{C}^n$, $n = 2, 3$, indiquer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels complexes.

(a) $\{(\alpha + \beta, \alpha, 2\alpha - \mathrm{i}\beta) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}$.

(b) $\{(\alpha + \mathrm{i}, \alpha, -\alpha) \in \mathbb{C}^3 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(c) $\{(\alpha, \mathrm{i}\alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.

(d) $\{(\alpha, \mathrm{i}\alpha) \in \mathbb{C}^2 \mid \alpha \in \mathbb{C}\}$.

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid 2\mathrm{i}x + (\mathrm{i} - 1)y - z = 0\}$.

(f) $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| = 0\}$.

Exercice 3. Considerons l'espace $\mathbb{C}^2$, avec les operations de somme $(z_1, w_1) + (z_2, w_2) := (z_1 + z_2, w_1 + w_2)$ et produit par scalaire $\lambda \cdot (z, w) = (\lambda z, \lambda w)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel complexe.

(b) Trouver une base de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel complexe. Quelle est sa dimension complexe $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2)$?

(c) Montrer que $\mathbb{C}^2$ est un espace vectoriel réel.

(d) Trouver une base de $\mathbb{C}^2$ comme espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^2)$?

Soit $V = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \mathrm{Re}(z) = 0\}$.

(e) Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^2$, mais il n'est pas un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}^2$.

(f) Trouver une base de V comme sous-espace vectoriel réel. Quelle est sa dimension $\dim_{\mathbb{R}}(V)$?

Exercice 4. Considerons les vecteurs $v_1 = (1, -1)$ et $v_2 = (2, 1)$ en $\mathbb{R}^2$. Montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de v_1 et v_2. En déduire que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Considerons les vecteurs $v_1 = (2, -3, 4)$ et $v_2 = (1, -2, 2)$ dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Soit $u = (1, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$. Trouver $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

(b) Montrer que v_1, v_2 sont linéairement indépendants.

(c) Quels vecteurs $v = (x, y, z)$ peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire de v_1, v_2 ?

(d) Soit $v_3 = (0, -1, 1)$. Montrer que v_3 ne peut pas s'exprimer comme combinaison linéaire de v_1, v_2. En déduire que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Soit $w = (1, 0, 0)$. Ecrire w comme combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3.

Exercice 6. Considerons les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 3, -3)$ et $v_3 = (-3, -1, m)$ dans $\mathbb{R}^3$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de m on a que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

(b) Soit m qui satisfait la condition (a). Montrer que alors v_1 est combinaison linéaire de v_2 et v_3, et de même façon v_2 est combinaison linéaire de v_1 et v_3.

(c) Soit m qui ne satisfait pas la condition (a). Montrer que alors la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Considerons les vecteurs $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 0, -3)$ et $v_3 = (m - 3, 3, m)$ dans $\mathbb{R}^3$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) Pour quelles valeurs de m on a que v_3 est combinaison linéaire de v_1 et v_2 ?

(b) Soit m qui satisfait la condition (a). Montrer que alors v_1 est combinaison linéaire de v_3, et v_2 n'est pas une combinaison linéaire de v_1 et v_3.

(c) Soit m qui ne satisfait pas la condition (a). Montrer que alors la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8. Trouver v_1, v_2, v_3 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas colinéaires 2-à-2. Est-ce qu'ils forment une famille libre ?

Exercice 9. Déterminer si les familles suivantes de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont libres / génératrices / une base de $\mathbb{R}^n$.

(a) $\{(2, 0), (3, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $\{(3, 1), (5, -1), (7, 4)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\{(-1, 2), (-2, 4), (6, -12)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $\{(3, -2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(e) $\{(2, -3, 4), (1, -2, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(f) $\{(2, 1, -1), (2, -1, 2), (3, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(g) $\{(-1, 2, -3), (2, -3, 5), (1, -1, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(h) $\{(2, -1, 2), (-1, 2, -3), (4, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(i) $\left\{(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}), (-2, 1, 3), (-3, \frac{3}{2}, \frac{9}{2})\right\} \subset \mathbb{R}^3$.

(j) $\{(0, 1, 2), (1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(k) $\{(2, -3, -1, 1), (3, -2, 1, -1), (2, 3, 5, -1), (1, -1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(l) $\{(-1, 2, 1), (1, -1, 0), (1, m, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$, avec $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. Montrer que les familles suivantes de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont libres. Completer (si nécessaire) la famille à une base de $\mathbb{R}^n$.

(a) $\{(2,1)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $\{(3,1),(-2,2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\{(3,1,2),(4,2,-1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(d) $\{(3,-5,1),(2,-2,0),(7,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(e) $\{(2,1,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(f) $\{(2,1,0),(1,-3,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(g) $\{(1,1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(h) $\{(3,2,0,-3),(1,2,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

(i) $\{(2,1,0,4),(3,1,0,2),(-2,-1,1,-3)\} \subset \mathbb{R}^4$.

Exercice 11. Montrer que les familles suivantes de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ sont génératrices. Extraire (si nécessaire) une base de $\mathbb{R}^n$.

(a) $\{(2,1),(4,1),(0,-3)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(b) $\{(3,1),(-2,2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(c) $\{(3,1,2),(4,2,-1),(1,2,0),(0,1,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(d) $\{(3,-5,1),(2,-2,0),(1,-3,1),(7,-2,0)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(e) $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

(f) $\{(2,1,0),(3,-2,-7),(4,1,-2),(-3,-4,-5),(0,3,2)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Déterminer une base et la dimension des suivants espaces vectoriels.

(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - z = 0\}$.

(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 4y + 2z = 3y + 4z = 0\}$.

(c) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = 0 \end{array}\right.\right\}$.

(d) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\{\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ -2x + 3z = 0 \end{array}\right.\right\}$.

(e) $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ x - 2y - 8z = 0 \end{array}\right.\right\}$.

(f) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{array}\right.\right\}$.

(g) $\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \left\{\begin{array}{l} -2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right.\right\}$.

(h) $\{(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(i) $\{(\alpha+\beta, 2\alpha-\beta, 0, 3\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(j) $\{(\alpha+2, \beta-1, 2\alpha+3\beta+1) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

(k) $\{(\alpha+\gamma, 2\alpha+\beta+\gamma, \beta-\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 13. Exprimer les suivants espaces vectoriels comme solutions d'un système linéaire homogène.

(a) $\mathrm{Vect}\{(2,1,0),(0,1,2)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $\mathrm{Vect}\{(3,0,1),(-2,0,4),(2,3,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) $\mathrm{Vect}\{(2,1,-3),(-4,-2,6)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(d) $\mathrm{Vect}\{(2,1,3,1),(-2,4,-1,3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(e) $\mathrm{Vect}\{(3,1,5,4),(-2,2,3,0),(-2,1,1,1)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

(f) $\mathrm{Vect}\{(3,1,0,2)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Exercice 14. Soient $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,-2,1)$, $v_3 = (3,-2,4)$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

Ecrire les vecteurs suivants comme (unique) combinaison linéaire de v_1, v_2, v_3. Autrement dit, calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(b) $(2,1,0)$. (c) $(2,-1,1)$. (d) $(5,-3,5)$.

(e) $(1,-3,4)$. (f) $(1,2,-3)$. (g) $(-3,-5,4)$.

(h) $(0,-8,4)$. (i) $(0,3,-3)$. (j) $(0,-5,1)$.

(k) $(1,0,0)$. (l) $(0,1,0)$. (m) $(0,0,1)$.

Exercice 15. Soient $v_1 = (7,5,1)$, $v_2 = (2,1,-1)$, $v_3 = (-3,-1,3)$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, et $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

(a) Est-ce que la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre ?

(b) Extraire (si nécessaire) de $\{v_1, v_2, v_3\}$ une base $\mathcal{B}$ de V. Quelle est la dimension de V ?

(c) Exprimer V comme espace des solutions d'un système linéaire homogène.

(d) Compléter (si nécessaire) $\mathcal{B}$ à une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16. Soient $v_1 = (2,1,-3,-8)$, $v_2 = (-3,5,-2,-1)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^4$, et $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4) \mid x_1 - 2x_3 + x_4 = 0\}$.

(a) Montrer que $\{v_1, v_2\}$ est une famille libre. Quelle est la dimension de $V = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$?

(b) Trouver une base de E, et en déduire la dimension de E.

(c) Montrer que $V \subsetneq E$.

(d) Compléter $\{v_1, v_2\}$ à une base de E.

(e) Trouver $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tels que $V = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \end{array} \right. \right\}$.