Université Paris-Diderot — Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II — L1 MASS-2

Feuille de TD 6 - Changements de base

Questions du cours. Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension n et m respectivement, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E, et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Soit $f : E \to F$ l'application linéaire représentée par la matrice A par rapport aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}$.

(a) Définir la matrice de changement de base P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

(b) Définir la matrice de changement de base Q de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

(c) Écrire la matrice qui représente f par rapport aux bases $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$.

(d) Écrire la matrice qui représente f par rapport aux bases $\mathcal{B}, \mathcal{C}'$.

(e) Écrire la matrice qui représente f par rapport aux bases $\mathcal{B}', \mathcal{C}$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.

(a) Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$.

(b) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$, où $v_1 = (1, 1)$ et $v_2 = (1, -1)$.

(c) Calculer $w_1 = f(v_1)$ et $w_2 = f(v_2)$, et leurs coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(d) Écrire la matrice B associée à f par rapport à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.

(e) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $P^{-1}AP = B$.

(f) Justifier le point précédent par rapport au changement de base fait.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel de dimension n, et $f : E \to E$ une application linéaire. Soit $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ une base de E, et soit $A = (a_{i,j})$ la matrice associée à f par rapport à $\mathcal{B}$. Soit $\mathcal{B}' = (-v_1, v_2, \ldots, v_n)$ la base de E obtenue en changeant le signe du premier vecteur de la base $\mathcal{B}$.

(a) Quelle est la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ au domaine et $\mathcal{B}'$ au codomaine ?

(b) Quelle est la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ au domaine et $\mathcal{B}$ au codomaine ?

(c) Quelle est la matrice associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}'$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $f(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)$.

(a) Écrire la matrice associée à f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Donner une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Ker} f$.

(c) Compléter $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Trouver une base $\mathcal{C}$ de $\operatorname{Im} f$.

(e) Compléter $\mathcal{C}$ à une base $\mathcal{C}'$de $\mathbb{R}^3$.

(f) Écrire la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ (au départ) et $\mathcal{C}'$ (à l'arrivée).

Exercice 4. On considère un espace vectoriel réel E de dimension 3. Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E. Soit f l'application linéaire dont la matrice dans cette base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Montrer que les vecteurs $u_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $u_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$ et $u_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment un système libre dans E. Écrire dans cette nouvelle base la matrice de l'application f.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par $f(x, y, z) = (-2x + 2y + 2z, -2x + 3y + 2z, -2x + y + 2z)$.

(a) Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(b) Exprimer le noyau $\operatorname{Ker} f$ de f comme solution d'un système linéaire homogène. Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ et trouver un vecteur v_3 qui forme une base de $\operatorname{Ker} f$.

(c) Soient $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 1, -1)$. Montrer que $f(v_1) = 2v_1$ et $f(v_2) = v_2$.

(d) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Écrire la matrice B associée à f par rapport à la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

(f) Écrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, calculer P^{-1} la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$, et vérifier que $PBP^{-1} = A$.

Exercice 6. Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$ et $F = \operatorname{Vect}(w)$, avec $w = (1, 1, 0)$.

(a) Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $u - rw \in E$.

(c) Soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $u \mapsto u - rw$ avec r donné par le point précédent. Déterminer la matrice associée à π par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$.

(d) Montrer que $v_1 = (1, 2, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 1)$ forment une base de E. En déduire que $\mathcal{B}(v_1, v_2, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Écrire la matrice associée à π par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Exercice 7. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Trouver des vecteurs v_1, v_2, v_3 linéairement indépendants et tels que $f(v_1) = v_1$, $f(v_2) = 2\,v_2$, $f(v_3) = 2\,v_3$.

(b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base v_1, v_2, v_3. Déterminer la matrice P^{-1}. Quelle est la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) ?

(c) On pose $g = f - 2\operatorname{Id}$. Soit $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire telle que $h(v_1) = 0$. Montrer que $h \circ g = 0$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par :

$$f(x, y, z) = (-14x + 5y + 8z,\ 4x - 3z,\ -24x + 8y + 14z).$$

(a) Donner la matrice de f par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (-1, 1, -2), \quad u_2 = (3, 2, 4), \quad u_3 = (1, 1, 1)$$

(b) Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Exprimer $f(u_1)$, $f(u_2)$ et $f(u_3)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

(d) Déterminer la matrice de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(e) Déduire de la question (d) la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$;

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $f(x, y) = (2x + y, x + 2y)$.

(a) Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$.

(b) Montrer que $\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

(c) Trouver un vecteur non nul $v_1 \in \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$.

(d) Trouver un vecteur non nul $v_2 \in \operatorname{Ker}(f - 3\operatorname{Id})$.

(e) Montrer que (v_1, v_2) est une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(f) Écrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, P^{-1} de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{E}$, B la matrice associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{B}$. Quel rapport il y a entre A, B et P ?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (6x-8y-2z, 3x-4y-z, 2x-4y+2z)$.

(a) Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(b) Montrer que $\det(A - \lambda \operatorname{Id}) = -\lambda(\lambda - 2)^2$.

(c) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$.Trouver un vecteur v_1 tel que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(v_1)$.

(d) Soit $C = A - 2 \operatorname{Id}$. Trouver un vecteur non nul v_2 tel que $Cv_2 = 0$.

(e) Trouver un vecteur non-nul v_3 tel que $Cv_3 = v_2$.

(f) Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(g) Écrire B la matrice associée à f par rapport à la base $\mathcal{B}$.

(h) Écrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$, calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.

Exercice 11. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x, y, z) = (2x + y - z, x + 2y + z, -x + y + 2z)$$

(a) Donner la matrice de f par rapport à la base canonique $\mathcal{E}$.

(b) Montrer que $f \circ f = 3f$.

(c) Donner une base et la dimension de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Si $V \subseteq \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel, on note par

$$V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, w \rangle = 0 \; \forall\, v \in V\}$$

le *sous-espace vectoriel orthogonal* à V, où $\langle v, w \rangle$ dénote le produit scalaire standard entre v et w.

(d) Montrer que $\operatorname{Im} f^\perp = \operatorname{Ker} f$.

(e) Les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

(f) On pose :

$$u_1 = (1, -1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 1), \quad u_3 = (2, 1, -1).$$

Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis donner la matrice de f par rapport à cette base.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) et la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$.

(a) Montrer que cette dernière famille est une base de $\mathbb{R}^4$. Écrire les matrices de passage de la base canonique à cette nouvelle base et de cette nouvelle base à la base canonique.

(b) Soit $v = (1, -1, 3, -2)$. Calculer les coordonnées de v dans la nouvelle base.

(c) Calculer le vecteur w dont les coordonnées, dans la nouvelle base, sont $(-2, 0, 4, 1)$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

(a) Montrer que $\operatorname{Im} f$ est inclus dans $\operatorname{Ker} f$; en déduire le rang de f.

(b) Soit e_3 un vecteur de E tel que $f(e_3) \neq 0$. On pose $e_2 = f(e_3)$. Montrer qu'il existe un vecteur $e_1 \in \operatorname{Ker} f$ non proportionnel à e_2. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de E et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) *Application numérique.* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, dans la base canonique, est

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f satisfait les hypothèses ci-dessus. Choisir les vecteurs e_3 et e_1 et écrire la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3).

Exercice 14. Soit $v = (1,1,2) \in \mathbb{R}^3$, et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x-y+z)\cdot v$.

(a) Écrire la matrice A associée à f par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$.

(b) Calculer $\det(A - \lambda I)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Déduire de la question précédente que $f - \lambda\,\mathrm{id}$ est un automorphisme pour tout $\lambda \neq 0, 2$.

(d) Calculer $\mathrm{rang}(f)$, et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$. Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de $\mathrm{Ker}(f)$.

(e) Donner une base $\mathcal{B}_2$ de $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$.

(f) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{id})$. En déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

(g) Écrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$.

(h) Sans calculer P^{-1}, calculer $B = P^{-1}AP$.

(i) Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(j) Calculer P^{-1}, et A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ et $w \in \mathbb{R}^m$ deux vecteurs. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'application linéaire representée par la matrice $A = w\,{}^t v$ par rapport aux bases canonique $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_m$.

(a) Quelles sont les valeurs possibles pour $\mathrm{rang}(f)$?

(b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}(v, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\langle v, v_j\rangle = 0$ pour tout $j = 2, \ldots, n$, où $\langle v, v_j\rangle = {}^t v v_j$ denote le produit scalaire standard.

(c) Soit $\mathcal{C} = (w, w_2, \ldots, w_m)$ une base de $\mathbb{R}^m$. Écrire B la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée.

Application numérique. Soient $v = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ et $w = (-3,-2,1,1) \in \mathbb{R}^4$.

(d) Completer v à une base $\mathcal{B} = (v, v_2, v_3)$ telle que $\langle v, v_2\rangle = \langle v, v_3\rangle = 0$. Completer w à une base $\mathcal{C} = (w, w_2, w_3, w_4)$.

(e) Écrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{E}_3$ à $\mathcal{B}$, écrire la matrice Q de changement de base de $\mathcal{E}_4$ à $\mathcal{C}$.

(f) Écrire B la matrice associée à f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Vérifier que $B = Q^{-1}AP$.