Université Paris-Diderot — Année 2013-2014
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II — L1 MASS

Feuille de TD 9 - Limites, dérivées et DL

Questions de rappel. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, où $D_f \subseteq \mathbb{R}$ est le domaine de f.
(a) Donner la définition de fonction continue.
(b) Définir la dérivée de f en $a \in D_f$.
(c) Donner la définition de fonction $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
(d) Écrire la formule de Leibniz (dérivée d'un produit).
(e) Écrire la formule pour la dérivée d'une composition de fonctions.
(f) Supposons que $f : D_f \to f(D_f)$ soit bijective. Sous quelle condition f^{-1} est dérivable ? Dans ce cas, comment on calcule la dérivée de f^{-1} ?

Questions du cours. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, où $D_f \subseteq \mathbb{R}$ est le domaine de f.
(a) Énoncer le théorème de Rolle.
(b) Énoncer le théorème des accroissements finis.
(c) Définir les symboles de Landau O et o.
(d) Définir le developpement limité (DL) de f en a à l'ordre n.
(e) Énoncer la formule de Taylor avec reste de Young (avec o).
(f) Énoncer la formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Exercice 1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition) :

(a) $\cos x$, (b) $\sin x$, (c) $\tan x$,
(d) $\arccos x$, (e) $\arcsin x$, (f) $\arctan x$,
(g) $\cosh x$, (h) $\sinh x$, (i) $\tanh x$,
(j) x^n, avec $n \in \mathbb{Z}$, (k) e^x, (l) $\ln x$,
(m) x^α, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, (n) α^x, avec $\alpha \in]0, \infty[$.

Exercice 2. Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition) :
(a) $\arctan \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}$, (b) $\sqrt{1-x^2}\ \arcsin x - x$, (c) $\arccos \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$. Calculer $\lim_n (1+\lambda^n)^{1/n}$.
En déduire $\lim_n (a^n + b^n)^{1/n}$, pour $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 4. Pour chacune des fonctions suivantes, dire si elle est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
(a) $a(x) = |x|$, (b) $b(x) = x|x|$, (c) $c(x) = \begin{cases} x^2 \ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

(d) $d(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, (e) $e(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, (f) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5. Etudier la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est un entier non nul. Puis étudier la continuité de f' et f''.

Exercice 6. Mêmes questions de l'exercice précédent pour :

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

où α est un réel strictement positif.

Exercice 7. Montrer qu'on peut appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur les intervalles $[-1, 0]$ et $[0, 1]$. Déterminer dans chaque cas une valeur de c.

Exercice 8. Peut-on appliquer le Théorème de Rolle à la fonction $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ sur l'intervalle $[0, 4]$? Et à la fonction $g(x) = \tan x$ sur l'intervalle $[0, \pi]$?

Exercice 9. Vérifier qu'on peut appliquer le Théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = x - x^3$ sur l'intervalle $[-2, +1]$; quelle valeur de c obtient-on ? Même question pour $g(x) = \sqrt[3]{x^4}$ sur $[-1, +1]$.

Exercice 10. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$.
Appliquer le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[a, b]$ avec $a = 0$ et $b = 3$ et calculer la quantité réelle c qui intervient dans cette formule.

Exercice 11. Soit p et q deux nombres réels et un entier $n > 0$. On pose

$$f(x) = x^n + px + q.$$

(a) Montrer que si f admet k racines réelles, f' en admet au moins $k - 1$.

(b) En déduire que si n est pair, f a au plus 2 racines réelles et que si n est impair, f en admet au plus 3.

Exercice 12. Soit I un intervalle. On considère une application $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.
Montrer que pour tout réel h tel que $x + h \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + h) - f(x) = h\, f'(x + \theta\, h).$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer la quantité réelle c qui intervient dans la formule du Théorème des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

(b) Quelle est la valeur de θ dans la formule des accroissements finis ?

$$f(x + h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h).$$

Exercice 14. On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

(a) Soit $x_0 = 2$. Montrer que pour tout réel h tel que $x_0 + h \in D_f$, il existe $\theta \in]0, 1[$ unique tel que :

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0 + \theta\, h).$$

(b) Calculer alors la limite $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\theta(h)}{h}$.

Exercice 15. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a + bx + ce^{\alpha x}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c, \alpha \in \mathbb{R}^*$.

(a) Calculer le réel θ qui intervient dans la formule du Théorème des accroissements finis

$$f(x + h) - f(x) = h\, f'(x + \theta h).$$

Montrer que θ est unique et ne dépend que de h (et pas de x).

(b) En supposant que $\alpha = 1$, calculer la limite $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h)$.

Exercice 16. (a) Dessiner le graphe de la fonction $f(x) = \arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x})$.

(b) Montrer que $\frac{\pi}{4} = \arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3})$.

(c) Montrer que $0 < \arctan(\frac{1}{2}) - \arctan(\frac{1}{3}) < 0.15$.

Exercice 17. Prouver l'encadrement $\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \arcsin 0.6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$.

Exercice 18. Montrer que, pour $0 < x < 1$, on a $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 19. Montrer que, pour $x > 0$, on a $\arctan x > \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 20. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x+1}$. Soit (u_n) la suite telle que

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout entier } n \geq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que $f([1,2]) \subset [1,2]$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente, que sa limite $\ell \in [1,2]$ et qu'elle vérifie $f(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ.

(c) Montrer que pour tous réels x, $y \in [1,2]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.
En déduire que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout entier n.

(d) Trouver un entier n tel que $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{1000}$.

Exercice 21. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et

$$f(x) \geq x \qquad \text{pour tout } x \geq 0.$$

(a) Montrer que $f'(0) \geq 1$.

(b) Montrer que, quel que soit x strictement positif, il existe un réel c dans $]0, x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.

Exercice 22. Soit $f : [0,a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) On suppose que f est dérivable sur $]0,a]$ et que f' admet une limite finie en 0.
Montrer que f est dérivable en 0.

(b) Donner un exemple d'une fonction f qui soit dérivable sur $[0,a]$ mais dont la dérivée ne soit pas continue en 0.

(c) A l'aide du (a), montrer que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

est indéfiniment dérivable.

Exercice 23. Soit $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$.
Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet trois racines réelles.

Exercice 24. On considère des réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Montrer que l'équation $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ admet $n-1$ racines réelles.
(*Indication : utiliser l'exercice précédent.*)

Exercice 25. Montrer que l'on a :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad \text{pour tout } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right].$$

Exercice 26. Montrer que l'on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad \text{pour tout } x \in [0, \pi].$$

Exercice 27. Ecrire la formule de Taylor pour la fonction exponentielle sur $[0,1]$ à l'ordre $n+1$ et en déduire que :

$$\left|e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)\right| \;<\; \frac{e}{(n+1)!}.$$

En déduire la limite de la suite (x_n) définie par $x_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$.

Exercice 28. Ecrire la formule de Taylor pour la fonction $\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ à l'ordre $n+1$ et en déduire que :

$$\left|\ln 2-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)\right| < \frac{1}{(n+1)}.$$

En déduire la limite de la suite (v_n) définie par $v_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exercice 29. Ecrire la formule de Taylor au point 1 et à l'ordre 2 pour la fonction arctan et en déduire que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2 \;\leq\; (\arctan x)-\frac{\pi}{4} \;\leq\; \frac{1}{2}(x-1)$$

Exercice 30. Donner le DL d'ordre 5 au point 0 des fonctions suivantes :

(a) $\cos x$, (b) $\sin x$, (c) $\tan x$,

(d) $\arccos x$, (e) $\arcsin x$, (f) $\arctan x$,

(g) $\cosh x$, (h) $\sinh x$, (i) $\tanh x$,

(j) $(1+x)^n$, avec $n \in \mathbb{N}$, (k) e^x, (l) $\ln(1+x)$,

(m) $(1-ax)^{-1}$ avec $a \in \mathbb{R}$, (n) $(1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 31. Donner le DL d'ordre n au point a des fonctions suivantes :

$\sin x \cos 2x$	$n=6$	$a=0$	$\cos x \ln(1+x)$	$n=4$	$a=0$	$\tan\, x$	$n=6$	$a=0$
$(x^3+1)\sqrt{1-x}$	$n=3$	$a=0$	$\frac{x}{\sin\, x}$	$n=5$	$a=0$	$\ln \frac{\sin\, x}{x}$	$n=4$	$a=0$
$e^{\cos\, x}$	$n=5$	$a=0$	$e^{\sqrt{\cos\, x}}$	$n=5$	$a=0$	$(\cos\, x)\sqrt{1+x}$	$n=4$	$a=0$
$\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$	$n=4$	$a=0$	$\frac{\ln^2(1+x)}{e^x-1}$	$n=4$	$a=0$	$\ln(\cos\, x)$	$n=4$	$a=0$
$e^{\arcsin x}$	$n=4$	$a=0$	$(1+\arctan x)^{\frac{\sin\, x}{x}}$	$n=3$	$a=0$	$x(\mathrm{ch}\, x)^{\frac{1}{x}}$	$n=4$	$a=0$
$\sqrt{1-\ln(1+x)}$	$n=4$	$a=0$	$\sqrt{x}$	$n=3$	$a=1$	$\ln\, x$	$n=3$	$a=1$
e^x	$n=4$	$a=1$	$\cos\, x$	$n=4$	$a=\frac{\pi}{2}$	$\cos(\ln\, x)$	$n=3$	$a=1$
$-\frac{1-x}{1+\arctan\, x}$	$n=4$	$a=0$	$\sin(x^2)$	$n=7$	$a=0$	$(\sin\, x)^2$	$n=7$	$a=0$
$\arctan(x^2)$	$n=7$	$a=0$	$(\arctan\, x)^2$	$n=7$	$a=0$	$\left(\frac{\sin\, x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$	$n=2$	$a=0$
$\ln(1+x^2)$	$n=3$	$a=1$	$\operatorname{arcsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$	$n=4$	$a=0$	$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$	$n=5$	$a=0$

Exercice 32. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\,\sin x}{x^2+x^3}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos x-1}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{\sqrt{1-\cos x}}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin 3x}{1-2\cos x}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$, (g) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln x-1}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{(1+x)^{1/3}-1}$,

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$, (j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x)$, (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

Exercice 33. Calculer la dérivée septième et huitième en 0 des fonctions $\sqrt{1-\sin(x^2)}$ et $\sqrt{1-\sin(x^4)}$.

Exercice 34. Donner le DL à l'ordre 2 en 0 de $f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$. En déduire la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 35. Déterminer a et b pour que la fonction $f(x)=\cos x-\frac{1+ax^2}{1+bx^2}$ ait un développement limité nul à l'ordre 5 en 0.

Exercice 36. (a) Ecrire le DL à l'ordre 7 de la fonction

$$f(x)=\frac{x}{\arctan x^2}-\frac{1}{x}$$

au voisinage de 0.

(b) Décrire la position relative, au voisinage de 0, du graphe de la fonction f et celui de la cubique $x\mapsto x^3/3$.

Exercice 37. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x+1-\cos x}{x^2}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\sin x}-x}{\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\cosh x-2}{x^4}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}-\frac{1}{\sin^3 x}$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$,

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}}-e^{1-\frac{x}{2}}}$, (k) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}-\cos x$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch}2x-\operatorname{ch}x}{\sin^2 x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x(1+\cos x)-2\tan x}{2x-\sin x-\tan x}$, (o) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^x-1-(\sin x)\ln x}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$,

(p) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$, (q) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{\cos(x+x^2)}{1+x+x^2}-e^{-x}\right]$, (r) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)\ln|x|}{|x|^{5/2}}$.

Exercice 38. Calculer la limite quand x tend vers 0, de la fonction

$$\frac{2(1-\cos x)\sin x-x^3(1-x^2)^{1/4}}{\sin^5 x-x^5}$$

Exercice 39. Calculer la partie principale quand x tend vers 0, de la fonction

$$\tan(\sin x)-\sin(\tan x).$$

Exercice 40. Ecrire le développement limité des fonctions $\cos x-\operatorname{ch}x$ et $\ln(1+x)^2$ à l'ordre 2 en 0. En déduire

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\operatorname{ch}x}{(\ln(1+x))^2}.$$

Exercice 41. Donner le développement limité de la fonction $f(x)=\operatorname{sh}^2(x)-x\tan(x)$ au voisinage de $x=0$ à l'ordre 6. En déduire

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sin^6(x)}.$$

Exercice 42. On considère deux fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Supposons que

$$\begin{aligned} f(0)=g(0)&=0,\\ f'(0)=g'(0)&=0,\\ g''(0)&\neq 0. \end{aligned}$$

Démontrer que : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f''(0)}{g''(0)}$.

Exercice 43. Soient f et g deux fonctions impaires de classe $\mathcal{C}^3$ sur un voisinage de 0, avec $g'''(0) \neq 0$. Déterminer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2f(2x) + f(3x)}{g(x) - 2g(2x) + g(3x)}.$$

Exercice 44. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

(a) Montrer que f est définie pour $x \neq 0$ et qu'elle admet un prolongement par continuité en $x = 0$. On notera encore f la fonction obtenue par ce prolongement.

(b) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

(c) Etudier la dérivabilité de la fonction f. Préciser la tangente à la courbe de f en 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 45. Soit f la fonction définie par $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

(a) Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 en 0.

(b) Montrer que f est prolongeable par continuité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par une fonction g.

(c) Etudier la dérivabilité de la fonction g. Préciser la tangente à la courbe représentative de g au point 0 et la position de la courbe par rapport à cette tangente.