

Test

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Considérons aussi les applications $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ données par

$$f(x, y, z) = (2x + y + 3z, -x + y + z, x + 5y + 9z), \quad g(x, y, z) = (2x - y + z, x + y + 5z, 3x + y + 9z).$$

En sachant que pour les systèmes suivants on a

$$\begin{aligned} (S_1) : & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ (S_2) : & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 5 & b \\ 3 & 1 & 9 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & b \\ 0 & 2 & 6 & 3b - c \\ 0 & 0 & 0 & 2a + 5b - 3c \end{array} \right), \\ (S_3) : & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \\ (S_4) : & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 5 & 9 & c \end{array} \right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 3 & 5 & a + 2b \\ 0 & 0 & 0 & 2a + 3b - c \end{array} \right), \end{aligned}$$

répondre, sans faire des calculs supplémentaires (sauf dans deux cas), aux questions suivantes. Indiquer quels systèmes on utilise chaque fois.

- (a) Quelle est la matrice associée à f ?
- (b) Quelle est la matrice associée à g ?
- (c) L'espace $\text{Vect}(v_1)$, avec $v_1 = (-2, -3, 1)$, est l'espace de solutions de quel système ?
- (d) L'espace $\text{Vect}(v_2)$, avec $v_2 = (-2, -5, 3)$, est l'espace de solutions de quel système ?
- (e) Donner une base de $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
- (f) Donner une base de $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$.
- (g) Donner un système d'équations caractérisant $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
- (h) Donner un système d'équations caractérisant $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$.
- (i) Donner un système d'équations caractérisant l'espace $V_1 = \text{Vect}\{(2, 1, 3), (-1, 1, 1), (1, 5, 9)\}$.
- (j) Donner un système d'équations caractérisant l'espace $V_2 = \text{Vect}\{(2, -1, 1), (1, 1, 5), (3, 1, 9)\}$.
- (k) Donner une base de V_1 et V_2 .
- (l) Donner une base de l'espace vectoriel $V_1 + V_2$.
- (m) Quel système $((S_1), (S_2), (S_3), (S_4))$ ou aucun des précédents) donne la réponse à la question suivante : Donner une base de $\text{Vect}\{(2, 1, 3), (-1, 1, 1)\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 5y + 9z = 0\}$.
- (n) Calculer le rang de f .