Université Paris-Diderot **8 octobre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Devoir surveillé 1

Durée : 1 heure.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(2-\mathfrak{i})z^2 - 2z - 2\mathfrak{i} = 0.$$

Corrigé 1. On a $\Delta = 12 + 16\mathfrak{i}$. Cherchons $\delta = x + \mathfrak{i}y$ solution(s) de $\delta^2 = \Delta$ par la méthode cartésienne :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 12 \\ 2xy = 16 \\ x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ y^2 = 4 \\ x \text{ et } y \text{ de même signe,} \end{cases}$$

et donc $\delta = \pm(4 + 2\mathfrak{i})$. On en déduit les deux solutions de l'équation $z_\pm = \frac{2\pm(4+2\mathfrak{i})}{2(2-\mathfrak{i})}$, soit $z_+ = 1 + \mathfrak{i}$ et $z_- = -\frac{1}{5}(1 + 3\mathfrak{i})$.

Exercice 2.

(a) Déduire de l'expression $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$, les formules de $\sin(\alpha+\beta)$ et $\cos(\alpha+\beta)$.

(b) Exprimer $\sin(4\alpha)$ en fonction des puissances de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

Corrigé 2.

(a) On a

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + \mathfrak{i}\sin(\alpha+\beta) &= e^{i(\alpha+\beta)} \\ &= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ &= \big(\cos(\alpha) + \mathfrak{i}\sin(\alpha)\big)\big(\cos(\beta) + \mathfrak{i}\sin(\beta)\big) \\ &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) + \mathfrak{i}\big(\cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)\big). \end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on obtient

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \qquad \sin(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$$

(b) Avec la formule qui précède, on obtient $\sin(4\alpha) = \sin(2\alpha + 2\alpha) = 2\cos(2\alpha)\sin(2\alpha)$ ainsi que $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$ et $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$. Finalement, on a

$$\sin(4\alpha) = 4\big(\cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2\big)\cos(\alpha)\sin(\alpha).$$

Exercice 3.

(a) Exprimer sous formes exponentielle, trigonométrique et cartésienne les solutions de l'équation $z^6 = 1$.

(b) Représenter graphiquement ces nombres dans le plan.

(c) Définir les racines primitives sixièmes de l'unité et les déterminer.

(d) Donné $a \in \mathbb{C}$, quelles sont les solutions de l'équation suivante ?

$$\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}} = a.$$

Si $a = \eta^3$, pour quels valeurs de η, l'équation précédente n'a pas de solutions ?

Corrigé 3.

(a) Racines sixièmes de l'unité : $\eta_k = e^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{6}} = e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{3}} = \cos(\frac{k\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(\frac{k\pi}{3})$ pour $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$, c'est à dire $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta_3 = -1$, $\eta_4 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\eta_5 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(c) Soit η une racine sixième de l'unité. Alors η est racine primitive si et seulement si $\eta^m \neq 1$ pour $0 < m < 6$. On vérifie que η_1 et η_5 sont primitives (c'est toujours le cas). Ce sont les seules : $\eta_0^1 = 1$, $\eta_2^3 = 1$, $\eta_3^2 = 1$, $\eta_4^3 = 1$.

(d) z est solution de l'équation ssi $z \neq \mathrm{i}$ et $z+\mathrm{i} = a(z-\mathrm{i})$, c'est à dire $z \neq \mathrm{i}$ et $(a-1)z = \mathrm{i}(1+a)$. Donc si $a = 1$, l'équation n'admet pas de solution. Si $a \neq 1$ l'équation admet une unique solution $z = \mathrm{i}\frac{a+1}{a-1}(\neq \mathrm{i})$.

On a vu que l'équation n'admet pas de solution ssi $a = 1$, ssi $\eta^3 = 1$, ssi η est une racine troisième de l'unité, ssi $\eta \in \{1, \eta_2, \eta_4\}$.