Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes Sections

Corrigé de l'examen du Jeudi 18 décembre

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Questions de cours.

1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell$.*

   $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tel que

   $$x \in \left]1-\delta, 1+\delta\right[\setminus \{1\} \quad \Rightarrow \quad f(x) \in \left]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon\right[.$$

   Remarque : d'autres formulations équivalentes sont possibles.

2. *On considère l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = iz + 3$. Quelle est la nature géométrique de g ? Préciser les caractéristiques de g.*

   L'application g est de la forme $g(z) = az + b$ avec $|a| = 1$ et $a \notin \mathbb{R}$.
   Par conséquent, g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ car $\mathrm{i} = e^{\mathrm{i}\pi/2}$.
   Le centre de la rotation correspond au seul point fixe de g, c'est à dire, le point $z \in \mathbb{C}$ qui vérifie $g(z) = z$:

   $$\begin{aligned} iz + 3 = z &\Leftrightarrow\ (1-\mathrm{i})z = 3 \\ &\Leftrightarrow\ z = \frac{3}{1-\mathrm{i}} = \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. *Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 = 1$.*

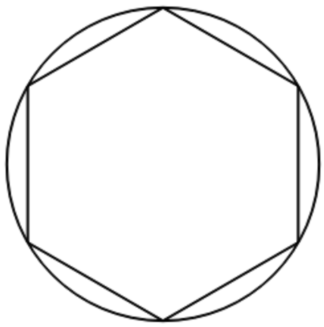
   Les solutions de l'équation $z^6 = 1$ sont par définition les racines sixièmes de l'unité.
   On cherche z sous sa forme exponentielle notée $\rho\, e^{\mathrm{i}\alpha}$ ($\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$).
   $z^6 = 1 \Leftrightarrow \rho^6\, e^{\mathrm{i}6\alpha} = e^0 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^6 = 1 \\ 6\,\alpha = 0 + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \alpha = k\frac{\pi}{3} \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
   On en déduit que les racines sixièmes de l'unité sont :
   $\omega_0 = e^0 = 1$, $\omega_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $\omega_2 = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$, $\omega_3 = e^{\mathrm{i}\pi} = -1$, $\omega_4 = e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$ et $\omega_5 = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}$.

2. *Montrer que i est une solution de l'équation $z^6 = -1$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = -1$ dans $\mathbb{C}$ en exprimant les racines de cette équation sous formes exponentielles, cartésiennes et trigonométriques, et les dessiner sur le cercle unité.*

   i est une solution de l'équation $z^6 = -1$ car $\mathrm{i}^6 = (\mathrm{i}^2)^3 = (-1)^3 = -1$.
   On obtient donc l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = -1$ en multipliant la solution particulière i par les racines sixièmes de l'unité.

Les solutions sont donc :

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \mathrm{i}\cdot\omega_0 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{0} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+0} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\tfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{2} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot 1 = \mathrm{i}; \\
z_1 &= \mathrm{i}\cdot\omega_1 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \cos\tfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{5\pi}{6} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot\left(\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\tfrac{1}{2}; \\
z_2 &= \mathrm{i}\cdot\omega_2 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{6}} = \cos\tfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{7\pi}{6} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}+\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\tfrac{1}{2}; \\
z_3 &= \mathrm{i}\cdot\omega_3 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\pi} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\pi} = e^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \cos\tfrac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\tfrac{3\pi}{2} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot(-1) = -\mathrm{i}; \\
z_4 &= \mathrm{i}\cdot\omega_4 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{6}} = \cos\tfrac{11\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{11\pi}{6} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot\left(-\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\tfrac{1}{2}; \\
z_5 &= \mathrm{i}\cdot\omega_5 &&= e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}} = e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{6}} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \cos\tfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{\pi}{6} \\
& &&= \mathrm{i}\cdot\left(\tfrac{1}{2}-\mathrm{i}\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$



Les solutions des l'équation $z^6 = -1$

Exercice 3. NB : la notation $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ **est synonyme de** $< u_1, u_2, u_3 >$.
Considérons dans $\mathbb{R}^3$ *les trois vecteurs suivants*

$$u_1 = (1, -1, 2), \qquad u_2 = (1, 3, -1), \qquad u_3 = (3, 1, 3).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ *le sous-espace vectoriel engendré par* u_1*,* u_2 *et* u_3*.*

1. *La famille* (u_1, u_2, u_3) *est-elle libre ? Quelle information peut-on en déduire pour* $\dim F$ *?*

   La famille (u_1, u_2, u_3) est libre si et seulement si on a la propriété suivante :

   $$\text{Pour tout } x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \quad x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

   ce qui équivaut , en utilisant les coordonnées des vecteurs, à :
   le système $(E)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(0, 0, 0)$.
   On a :

   $$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrclc} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & (L_1) \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 & (L_2) \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & (L_3) \end{array}\right.$$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrclccl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 & (L_1') & = & (L_1) \\ & & 4x_2 & + & 4x_3 & = & 0 & (L_2') & = & (L_2)+(L_1) \\ & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 & (L_3') & = & (L_3)-2(L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \qquad (L_1'') = (L_1') \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \qquad (L_2'') = (L_2')/4 \\ & & & & 0 & = & 0 \qquad (L_3'') = 4(L_3') + 3(L_2') \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \qquad (L_1'') \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \qquad (L_2'') \end{array}\right.$$

Ce dernier système est échelonné avec deux équations et trois inconnues.

Il a donc deux inconnues principales et une variable libre (ou inconnue secondaire). Ce système admet donc une infinité de solutions, et en particulier des solutions non nulles. Ainsi il existe au moins un triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ avec $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$ et $x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 = 0$.

On en conclut que la famille (u_1, u_2, u_3) est liée.

Comme (u_1, u_2, u_3) est liée, on a

$$\dim F = \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) < \mathrm{Card}(u_1, u_2, u_3) = 3.$$

2. *Le sous-espace vectoriel F est-il de dimension 0 ? de dimension 1 ?*

   On observe que u_1 et u_2 sont non nuls et qu'ils ne sont pas colinéaires, donc

   $$\dim F = \dim \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) \geq 2.$$

3. *En déduire la dimension de F. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Exprimer le vecteur u_3 comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.*

   D'après les questions 1. et 2., on a
   $$\dim F = 2.$$

   Les vecteurs u_1 et u_2 sont non nuls et ils ne sont pas colinéaires, donc (u_1, u_2) est une famille libre de vecteurs de F.

   Comme $\dim F = 2$, la famille (u_1, u_2) est une famille libre maximale, donc une base.

   D'après la question 1., on a $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -2x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \end{array}\right.$

   Par conséquent, si on prend $x_3 = 1$ on a $-2u_1 - u_2 + u_3 = 0$ c.a.d.

   $$u_3 = 2u_1 + u_2.$$

Considérons le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -5x + 3y + 4z = 0\}.$$

4. *Le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*

   G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car il est l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène.

5. *Donner une base $\mathcal{B}$ de G et la dimension de G.*

   Plusieurs méthodes sont possibles, par exemple :

   – *Première méthode* : On peut dire tout de suite que le système qui définit G est un système échelonné avec une équation et trois inconnues, donc deux inconnues secondaires (ou variables libres). On en déduit que $\dim G = 3 - 1 = 2$.
     On poursuit en produisant 2 vecteurs non colinéaires vérifiant l'équation de G, par exemple $u_1 = (1, -1, 2)$ et $u_2 = (1, 3, -1)$.
     Dans un espace de dimension 2, un famille libre de cardinal 2 est une base donc (u_1, u_2) est une base de G.

   – *Deuxième méthode* : on résout le système échelonné $-5x + 3y + 4z = 0$.
     Le vecteur $(x, y, z) \in G$ si, et seulement si, $x = \frac{3}{5}y + \frac{4}{5}z$
     donc $G = \{\, y(\frac{3}{5}, 1, 0) + z(\frac{4}{5}, 0, 1) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(w_1, w_2)$
     avec $w_1 = (\frac{3}{5}, 1, 0)$ et $w_2 = (\frac{4}{5}, 0, 1)$.
     w_1 et w_2 engendrent G, de plus ils ne sont pas colinéaires, donc ils forment une base de G.

6. *Compléter la base $\mathcal{B}$ de G en une base de $\mathbb{R}^3$.*

On observe qu'il est suffisant de trouver $v \in \mathbb{R}^3 \setminus G$, par exemple $v = (1,0,0)$ puisqu'il ne vérifie pas l'équation de G.
On note $\mathcal{B}'$ la famille obtenue en complétant $\mathcal{B}$ par v.
L'espace engendré par $\mathcal{B}'$ contient strictement G puisqu'il contient v qui n'est pas dans G.
Donc $\dim G = 2 < \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{B}') \leq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.
Il suit que $\dim \mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = 3$ et par conséquent $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}') = \mathbb{R}^3$.
$\mathcal{B}'$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ de cardinal 3, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

7. *A-t-on $F = G$?*
   Plusieurs méthodes sont possibles, par exemple :
   - *Méthode 1* : $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, donc $F \subset G$ si, et seulement si $u_1 \in G$ et $u_2 \in G$.
     Testons le vecteur u_1. $-5 - 3 + 2 \cdot 4 = 0$. Les coordonnées du vecteur u_1 satisfont l'équation qui définit G.
     De même $u_2 \in G$ car $-5 + 3 \cdot 3 - 4 = 0$.
     On ainsi $F \subset G$ et, comme $\dim F = \dim G$, on en déduit que $F = G$.
   - *Méthode 2* : Si on a montré que (u_1, u_2) est une base de G, comme on a aussi montré en 2/ que c'est une base de F, on en déduit immédiatement que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2) = G$. Mais attention à cette méthode, comme tout sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension non nulle admet une infinité de bases, il n'est pas forcément facile de trouver une base commune à deux espaces égaux.
   - *Méthode 3* : Comme ici F et G sont de codimension 1, c'est-à-dire que $\dim F = \dim G = \dim \mathbb{R}^3 - 1$, il est facile de vérifier $F = G$ par une équation de F et une équation de G.
     Dans ce cas particulier uniquement, on a le résultat : $F = G$ si et seulement si F et G admettent des équations proportionnelles.
     En calculant une équation de F, on obtient une équation proportionnelle à $-5x + 3y + 4z = 0$ donc $F = G$.

Exercice 4. *On considère la fonction $h : [-1,1] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$h(x) = \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big).$$

1. *Pour $|u| < 1$, calculer $\big(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}\big)\big(\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}\big)$, puis montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.*
   On a $\big(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}\big)\big(\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}\big) = (\sqrt{1+u})^2 - (\sqrt{1-u})^2 = 1 + u - (1-u) = 2u$.
   On en déduit que pour tout $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
   $$\begin{aligned} h(x) = \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big) &= \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big)\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{x}\,\frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2x}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$
   Comme $\lim_{x\to 0} 2x = 0$ et $\lim_{x\to 0} \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} = 2$, on en conclut que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
   On note f le prolongement par continuité de h en 0.
2. *Étudier la parité et la continuité de f.*
   Parité de f. On considère $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$.
   $$f(-x) = \frac{1}{-x}\big(\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)^2}\big) = -\frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big) = -f(x).$$
   Par définition $f(0) = 0$ donc $f(0) = -f(0)$. Donc, $f(-x) = -f(x)$ pour tout x dans le domaine de f, c'est à dire, f est impaire.

   Continuité de f. Si $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, on a que $f(x) = \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big)$ est continue en x car elle est somme, composition et multiplication de fonctions continues en x.
   De plus, elle est continue en 0 par construction du prolongement par continuité $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$.

3. *Montrer que f est dérivable en 0.*
   On a, pour tout $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$,
$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{f(x)}{x} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$
   On en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.
4. *Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$. Calculer sa dérivée sur $]-1,1[\setminus\{0\}$.*
   Si $x \in\ ]-1,1[\setminus\{0\}$, on a que $f(x) = \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)$ est dérivable en x car elle est somme, composition et multiplication de fonctions dérivables en x.
   La dérivée de f en $x \in\ ]-1,1[\setminus\{0\}$ est :
$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}\right)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1+x^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}-(1+x^2)\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1-x^2}+x^2\sqrt{1+x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$
   Pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a $x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}>0$,
   donc $f'(x)$ est du même signe que la fonction $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.
5. *Déterminer le signe de f' sur $]0,1[$ et dresser le tableau de variation de f.*
   On sait que le signe de f' sur $]0,1[$ est égal au signe de la fonction $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$.
   Pour tout $x \in]0,1[$, on a $x^2>0$ donc $1-x^2<1+x^2$ et, puisque la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\sqrt{1-x^2}<\sqrt{1+x^2}$.
   On en conclut que f' est strictement positive sur $]0,1[$.
   Comme f est impaire et continue sur $[-1,1]$, le tableau de variations de f est

x	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$
f'	$+$	1	$+$
f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

6. *Déterminer $J=f([-1,1])$.*
   Comme f est continue et strictement croissante d'après le tableau de variations, on a
$$J=f([-1,1])=[f(-1),f(1)]=\left[-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\right]$$
7. *On définit l'application $g:[-1,1]\to J$ par $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in[-1,1]$.*
   Montrer que g est une bijection.
   On doit montrer que g est injective et surjective.
   D'après la question 5., la fonction g est strictement croissante, donc injective car :
$$x\neq y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x<y \quad \Rightarrow f(x)<f(y) \\ \qquad\text{ou} \\ x>y \quad \Rightarrow f(x)>f(y)\end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\neq f(y).$$
   Comme $J=f([-1,1])=g([-1,1])$, on sait que g est surjective.
   On note g^{-1} la bijection réciproque de g.

8. *Déterminer la parité, la continuité et le sens de variation de g^{-1}.*

   Comme g est impaire, g^{-1} est aussi impaire car :

$$g^{-1}(-x) = g^{-1}\Big(-g(g^{-1}(x)\Big) = g^{-1}\Big(g(-g^{-1}(x)\Big) = -g^{-1}(x) \qquad \text{pour } x \in]-1,1[\setminus\{0\}$$

   où on a utilisé $g\Big(g^{-1}(x)\Big) = x = g^{-1}\Big(g(x)\Big)$ et le fait que g soit impaire. De plus $g^{-1}(0) = 0$.

   D'après un théorème vu en cours g continue et strictement croissante implique que g^{-1} est continue et strictement croissante.

9. *Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur $]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$. Donner la formule du cours permettant de calculer la dérivée de g^{-1} à partir de celle de g et calculer la dérivée de g^{-1} en 0.*

   D'après la question 4., la dérivée de g en $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$ est

$$g'(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1+x^2}\sqrt{1-x^2}},$$

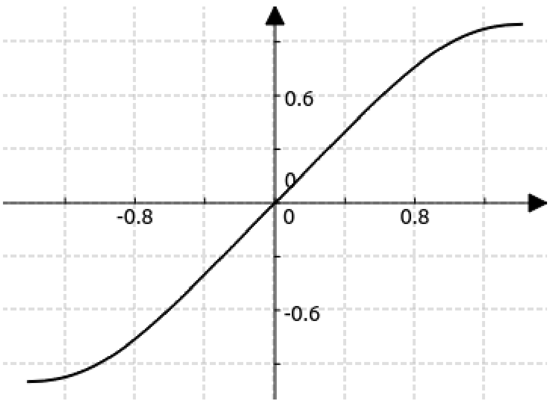
   D'après la question 5., pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, $g'(x) = f'(x) > 0$.
   De plus $g'(0) = f'(0) = 1$ d'après la question 3.
   On en déduit que g' ne s'annule pas sur $]-1,1[$ et d'après le théorème de dérivation d'une réciproque, g^{-1} est dérivable sur $g\,(]-1,1[) = \left]-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\right[$.
   De plus

$$\left(g^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

   En particulier, comme $g(0) = 0$, on a

$$\left(g^{-1}\right)'(0) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(0)\right)} = \frac{1}{g'\left(0\right)} = 1.$$

10. *Tracer le graphe de g^{-1}.*



Le graphe de g^{-1}

Remarque : en étudiant la limite du taux de variation de g en 1, on peut montrer que g y admet en une tangente verticale, de même en -1 puisque g est impaire.
Par conséquent, g^{-1} admet des tangentes horizontales en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
g^{-1} est donc également dérivable en $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ et sa dérivée y est nulle.