Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes Sections

Examen du Jeudi 18 décembre

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Donner la définition précise de $\lim_{x \to 1} f(x) = \ell$.
2. On considère l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = iz + 3$. Quelle est la nature géométrique de g ? Préciser les caractéristiques de g.

Exercice 2.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 = 1$.
2. Montrer que i est une solution de l'équation $z^6 = -1$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = -1$ dans $\mathbb{C}$ en exprimant les racines de cette équation sous formes exponentielles, cartésiennes et trigonométriques, et les dessiner sur le cercle unité.

Exercice 3. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants

$$u_1 = (1, -1, 2), \qquad u_2 = (1, 3, -1), \qquad u_3 = (3, 1, 3).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2 et u_3.

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Quelle information peut-on en déduire pour $\dim F$?
2. Le sous-espace vectoriel F est-il de dimension 0 ? de dimension 1 ?
3. En déduire la dimension de F. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Exprimer le vecteur u_3 comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

Considérons le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x + 3y + 4z = 0\}.$$

4. Le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. Donner une base $\mathcal{B}$ de G et la dimension de G.
6. Compléter la base $\mathcal{B}$ de G en une base de $\mathbb{R}^3$.
7. A-t-on $F = G$?

Exercice 4. On considère la fonction $h : [-1,1] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right).$$

1. Pour $|u| < 1$, calculer $\left(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}\right)\left(\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}\right)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$.
   On note f le prolongement par continuité de h en 0.
2. Etudier la parité et la continuité de f.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$. Calculer sa dérivée sur $]-1,1[\setminus\{0\}$.

   Dans la suite, on pourra supposer que la dérivée $f'(x)$ vérifie :

   $$\forall x \in\,]-1,1[\setminus\{0\}\,,\ f'(x) \text{ est du même signe que la fonction } \sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}.$$

5. Déterminer le signe de f' sur $]0,1[$ et dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer $J = f([-1,1])$.
7. On définit l'application $g : [-1,1] \to J$ par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.
   Montrer que g est une bijection.
   On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
8. Déterminer la parité, la continuité et le sens de variation de g^{-1}.
9. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur $]-1,1[$. Donner la formule du cours permettant de calculer la dérivée de g^{-1} à partir de celle de g et calculer la dérivée de g^{-1} en 0.
10. Tracer le graphe de g^{-1}.