Université Paris-Diderot **8 novembre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Toutes sections

Examen Partiel

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Questions de cours

1. On considère le sous-ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   Montrer, en justifiant votre réponse, que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer l'expression $(z - \mathrm{i})^5$, où z désigne un nombre complexe.
3. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.
   Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image directe $f\left([0, +\infty[\right)$ de $[0, +\infty[$ par f.
3. Déterminer les images réciproques $f^{-1}\left([\frac{1}{2}, +\infty[\right)$ et $f^{-1}\left([5, +\infty[\right)$ des intervalles $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et $[5, +\infty[$ par l'application f.
4. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier vos réponses.
5. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = f(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier vos réponses.

Exercice 3.

1. Ecrire le nombre complexe $-\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -\mathrm{i}$.

   On définit $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}$.

3. Exprimer u sous forme exponentielle et calculer u^3, u^5, u^{11} et u^{24} sous formes exponentielles, trigonométriques et cartésiennes, en faisant le moins de calculs possible.

4. On définit l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = u^3 z - i$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de g.
   (b) La transformation g est-elle une homothétie, une rotation, une translation ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer le rapport et le centre de g si g est une homothétie, ou l'angle et le centre de g si g est une rotation, ou le vecteur de translation de g si g est une translation, suivant votre réponse à la question précédente.
5. On définit l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $h(z) = u^{24} z - i$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de h.
   (b) La transformation h est-elle une homothétie, une rotation, une translation ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer le rapport et le centre de h si h est une homothétie, ou l'angle et le centre de h si h est une rotation, ou le vecteur de translation de h si h est une translation, suivant votre réponse à la question précédente.

Exercice 4.

On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$f(z) = (1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i},$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. Calculer les racines complexes de l'équation$(1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

2. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2 - 2\mathrm{i}\})$.

   On définit à présent l'application $g : \mathbb{C} \setminus \{i, -2\} \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \frac{1}{(1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i}}.$$

3. Déterminer les ensembles $g^{-1}(\{0\})$, et $g^{-1}(\{\frac{1+\mathrm{i}}{4}\})$.
4. L'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier vos réponses.