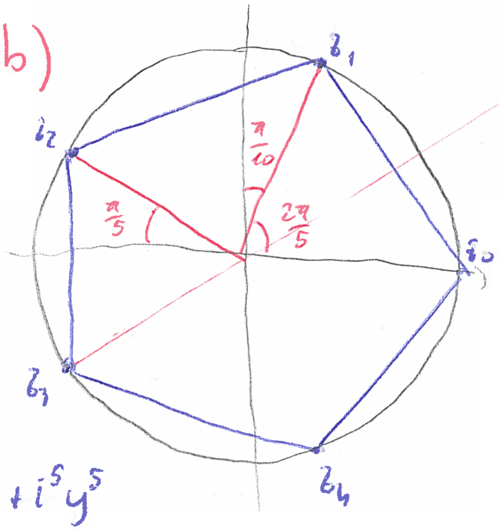
TD 01

Exo 11.

a) $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}} = \cos\frac{2k\pi}{5} + i \sin\frac{2k\pi}{5} \quad k=0,\dots,4$

b)



c) De $z^5 = 1$ on obtient pour $z = x+iy$:

(Binôme de Newton)

$(x+iy)^5 = x^5 + 5ix^4y + 10i^2x^3y^2 + 10i^3x^2y^3 + 5i^4xy^4 + i^5y^5$

$= (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5)$

En comparant les parties imaginaires, on obtient :

$y^5 - 10y^3x^2 + 5x^4y = 0.$ Si $y=0$ on obtient une solution ($x=1$, $z=z_0$).

Supposons $y \neq 0$. Soit $t = \frac{y}{x}$. On a donc

$t^4 - 10t^2 + 5 = 0 \to t^2 = 5 \pm \sqrt{25-5} = 5 \pm 2\sqrt{5}. \to t = \pm\sqrt{5 \pm 2\sqrt{5}}.$

d) Par interprétation géométrique, on voit que $\tan\frac{\pi}{5} = t$ la solution associée à z_3, $\Rightarrow \tan\frac{\pi}{5} = +\sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

~~De même~~, Pour $\frac{\pi}{10}$ on a $\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}$, donc $\tan(\frac{\pi}{10}) = \text{cotan}(\frac{2\pi}{5})$ $= \frac{1}{t}$ où t est la solution associée à z_1, c'est à dire $t = +\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

Il s'en suit que $\tan\frac{\pi}{10} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{25-20}} = \sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$

Remarquer que la formule $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ est bien vérifiée par $\alpha = \frac{\pi}{10}$ pour les valeurs trouvées : $\frac{2\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{5-2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$ OK.

P,e) Pour z_1, on a $\frac{y}{x} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

De $x^2+y^2=1$ on obtient $x^2\left(1+\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2\right) = 1$

$\to x^2 = (6+2\sqrt{5})^{-1} = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \to x = \frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}\ (>0) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Remarquer que $(\sqrt{5}-1)^2 = 5+1-2\sqrt{5} = 6-2\sqrt{5}$

$y = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot x = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{(5+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

Dans ce cas $x = \cos\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $y = \sin\frac{2\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$z_4 = \overline{z_1}$. Pour z_3: $\frac{y}{x} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$

De $x^2+y^2=1$ on obtient $x^2\left(1+\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\right)^2\right) = 1$.

D'où $x^2 = \frac{1}{6-2\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} \to x = -\frac{1}{4}\sqrt{6+2\sqrt{5}}\ (<0) = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$y = \sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot x = -\frac{\sqrt{(5-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})}}{4} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Dans ce cas $-x = -\cos\frac{6\pi}{5} = +\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. $-y = -\sin\frac{6\pi}{5} = +\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

et $z_2 = \overline{z_3}$.