Feuille de TD 3 - Algèbre linéaire

Questions du cours.

(a) A quelles conditions le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

(b) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre dans V ».

(c) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille génératrice de V ».

(d) Soient V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de V. Donner la définition de « $(u_1, \ldots, u_p)$ est une base de V ».

(e) Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition de la dimension de V. Si $n = 3$, quelles sont les valeurs possibles pour la dimension de V ?

Exercice 1. Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^2$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y = 0\}$;

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0\}$;

(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y + 1 = 0\}$;

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 3y \leq 4\}$;

(f) $F = \{(t, 4t) \mid t \in \mathbb{R}\}$;

(g) $G = \{(u + v, u - v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(h) $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 3\}$;

(i) $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y = 0\}$;

(j) $J = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right. \right\}$;

(k) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3z = 0\}$;

(l) $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xy = 0\}$;

(m) $M = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \right\}$;

(n) $N = \{(u, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(o) $O = \{(u + 1, 3v, v - u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(p) $P = \{(u + v, 2u, v - 4u) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(q) $Q = \{(-u, v, u + 3v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$;

(r) $R = \{(u + v - 2, v + 2, 2u + 3v - 2) \mid u, v \in \mathbb{R})\}$.

Exercice 2. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + 3z = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de F.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0 \,\}.$$

Mettre en évidence deux vecteurs v, w, non colinéaires, appartenant à P et montrer que tout élément de P est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v = (1, -2, 3)$ et $w = (2, -4, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) On suppose que w n'est pas multiple de v et on considère l'ensemble P de toutes les combinaisons linéaires de v et w. Montrer qu'on a $P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \,\}$, où a, b, c sont des nombres réels, non tous les trois nuls, que l'on déterminera.

Exercice 5. Déterminer une base et la dimension, des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbb{R}^3$:

(a) $A = \mathrm{Vect}(a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (3, 3, 10)$, $a_2 = (0, 3, 4)$ et $a_3 = (1, 0, 2)$;

(b) $B = \mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ où $b_1 = (1, 0, 0)$ et $b_2 = (0, 1, 1)$;

(c) $C = \{(2t + u, -u, -2t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$;

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x - y + 3z = 0\}$;

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y - z = 0 \;\text{ et }\; 3x - y + z = 0\}$.

Exercice 6. Comparaison de deux sous-espaces.

(a) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les quatre vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 3, 2),\ v_2 = (3, -1, 0, 1),\ v_3 = (1, 1, -6, -3),\ v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

On appelle F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par (v_1, v_2, v_3, v_4). Déterminer la dimension de F et en donner une base. Donner un système d'équations cartésiennes de F.

(b) Soit $G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et donner une base de G.

(c) Montrer que $F \subset G$. A-t-on $F = G$?

Exercice 7. Résoudre les systèmes suivants :

$$(a) \begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 8x + 2y - 2z = 9 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ x + y + 4z = -9 \\ 7x + 5y + z = 14 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x - 3y + 7z = -4 \\ x - 2y - 3z = 6 \\ 7x + 4y - z = 22 \end{cases}$$

Exercice 8. Résoudre en utilisant la méthode du pivot de Gauss :

$$(a) \begin{cases} x - 3y - 2z = -1 \\ 2x + y - 4z = 3 \\ x + 4y - 2z = 4 \\ 5x + 6y - 10z = 10 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 6 \\ 2x - y - 2z - 3t = 8 \\ 3x + 2y - z + 2t = 4 \\ 2x - 3y + 2z + t = -8 \end{cases}.$$

Exercice 9. Déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + \alpha z = 2 \\ 2x + \alpha y + 2z = 3 \end{cases}$$

(a) n'ait aucune solution ;

(b) ait une infinité de solutions ;

(c) ait une solution unique.

Exercice 10. Pour quelles valeurs des paramètres réels α, β, γ le système suivant admet au moins une solution ?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 3x + 8y - 14z = \beta \\ 2x + 4z = \gamma \end{cases}$$

Exercice 11. Soit le système

$$(S) \begin{cases} x + 3y + 4z = 0 & (L_1) \\ 3x + 2y + 4z = 0 & (L_2) \\ x + 2y + 3z = 0 & (L_3) \end{cases}.$$

On remplace L_1 par $L_1' = L_2 - L_1$, L_2 par $L_2' = L_2 - L_3$ et L_3 par $L_3' = L_1 - L_3$. Le système (S) est-il équivalent au système (S') $\begin{cases} L_1' \\ L_2' \\ L_3' \end{cases}$?

Exercice 12.

(a) Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la famille composée des vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (1, 1, 1)$.
La famille $\{u, v\}$ est-elle libre ? La famille $\{u, v\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$? La famille $\{u, v\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(b) Soient u, v les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (0, 3, 4)$ et $v = (1, 0, 5)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(c) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -1)$ et $w = (9, 8, 1)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(d) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ donnés par $u = (1, 1)$, $v = (-1, 1)$ et $w = (3, 3)$.
Forment-ils une famille libre de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$? Forment-ils une base de $\mathbb{R}^2$?

(e) Soient u, v, w les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ donnés par $u = (-1, 1, 1)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (-2, 5, 5)$.
Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ? Ces vecteurs engendrent-ils $\mathbb{R}^3$? Ces vecteurs forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

(f) Soient $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définie par $v_1 = (2, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (0, -1, 1)$ et $v_4 = (2, 1, 1)$.
Cette famille est-elle libre ? Cette famille est-elle génératrice ? Cette famille est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

(g) Compléter si possible la famille $\{(1, 0, -1), (0, 2, 3)\}$ en une base de $\mathbb{R}^3$.

(h) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(i) La famille $\{(1, 2, 0), (0, 1, 2), (0, 1, 1)\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?

Exercice 13. Pour quelles valeurs du paramètre réel a les vecteurs :

$$v_1 = (1, -1, 0, 2) \quad v_2 = (1, 0, 1, 2) \quad v_3 = (1, 3, 5, 7) \quad v_4 = (0, 2, 3, a)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère $a_1 = (2, -2, 3, 1)$ et $a_2 = (-1, 4, -6, -2)$.

(a) Trouver des vecteurs a_3 et a_4 tels que $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ soit une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer un système d'équations pour le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par a_1 et a_2.

Exercice 15. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les vecteurs $v = (1, 2)$ et $w = (-2, m)$, où $m \in \mathbb{R}$.

(a) À quelle condition sur le paramètre m le vecteur w est-il multiple du vecteur v ?

(b) En supposant que w *n'est pas* multiple de v, montrer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire de v et w.

Exercice 16. Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs suivants sont-ils linéairement indépendants ?
Forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?

(a) $u = (3, 2, 1)$ et $v = (4, 2, 0)$;

(b) $u = (3, 1, 2)$, $v = (5, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 4)$;

(c) $u = (-2, 4, 1)$, $v = (1, -2, 0)$ et $w = (3, m, -1)$ (discuter suivant les valeurs de m).

Exercice 17. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (2, 3, 1)$ et $v_2 = (1, -1, 2)$ engendrent le même sous-espace vectoriel que $w_1 = (3, 7, 0)$ et $w_2 = (5, 0, 7)$.