Université Paris-Diderot Année 2014-2015
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Section C

Feuille de TD 5 - Analyse de la variable réelle

Questions du cours.

(a) Donner les définitions de fonction paire, fonction impaire, fonction périodique.

(b) Donner la définition de maximum local d'une fonction.

(c) Donner la définition de maximum global d'une fonction sur un intervalle.

(d) Enoncer le théorème sur la bijectivité d'une application monotone.

(e) Expliquer comment le graphe de la réciproque f^{-1} d'une fonction bijective se construit à partir du graphe de la fonction f.

(f) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et en donner une description graphique.

(g) Soit f une fonction définie au voisinage de $-\infty$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.

(h) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et en donner une description graphique.

(i) Soit f une fonction définie dans un voisinage à gauche d'un point $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition précise de $\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell^+$ et en donner une description graphique.

(j) Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

(k) Donner un exemple explicite d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et n'admettant pas de limite, finie ou infinie, en 0.

(l) Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$. Expliciter les cas pour lesquels $\lim_{x \to +\infty} (f+g)(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$ et lister les cas dans lesquels il s'agit d'une forme indéterminée. Faire de même avec $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$.

(m) Enoncer les deux théorèmes sur les compositions de limites en les illustrant par des exemples.

(n) Enoncer un théorème sur la limite d'une fonction strictement monotone sur un intervalle.

(o) Enoncer le « théorème des gendarmes ».

(p) Enoncer le théorème sur les croissances comparées.

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition, discuter de la parité de la fonction f dans les exemples suivants.

(a) $f(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$,

(b) $f(x) = \frac{2x^3-5}{x^2+x-6}$,

(c) $f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{3-x}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$,

(e) $f(x) = x - |x|$,

(f) $f(x) = \frac{x}{|x|}$,

(g) $f(x) = \sin(x)\cos^2(x)$,

(h) $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$,

(i) $f(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}$,

(j) $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{\ln(|x-1|)}$.

Exercice 2. On vous offre un emploi en CDD d'un mois. A la signature du contrat, vous avez le choix entre deux formules pour être payé(e) :

(a) Recevoir 1 million d'euros à la fin du mois.

(b) Recevoir 1 centime le premier jour, et chaque jour, le double du salaire de la veille.

Laquelle choisissez vous ?

Exercice 3. Représentez graphiquement, dans chaque cas ci-dessous, une fonction qui satisfait les conditions suivantes.

(a) $\lim_{0^-} f(x) = -1$, $\lim_{0^+} f(x) = 2$, $f(0) = 1$.

(b) $\lim_{0^-} f(x) = 2^+$, $\lim_{0^+} f(x) = 0^-$, $\lim_{4^-} f(x) = 3$, $\lim_{4^+} f(x) = +\infty$, $f(5) = 1$, $f(0) = 2$.

Exercice 4. Démontrer les formules de trigonométrie hyperbolique suivantes.

(a) $\operatorname{ch}(\alpha+\beta) = \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(b) $\operatorname{sh}(\alpha+\beta) = \operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) + \operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta)$,

(c) $\operatorname{th}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{th}(\alpha)+\operatorname{th}(\beta)}{1+\operatorname{th}(\alpha)\operatorname{th}(\beta)}$,

(d) $\operatorname{ch}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(e) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{sh}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}\operatorname{ch}(\alpha-\beta)$,

(f) $\operatorname{sh}(\alpha)\operatorname{ch}(\beta) = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\operatorname{sh}(\alpha-\beta)$,

(g) $\operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(h) $\operatorname{sh}(p) - \operatorname{sh}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})$,

(i) $\operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{ch}(\frac{p+q}{2})\operatorname{ch}(\frac{p-q}{2})$,

(j) $\operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) = 2\operatorname{sh}(\frac{p+q}{2})\operatorname{sh}(\frac{p-q}{2})$.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to 0} x^2 - 2x$,

(b) $\lim_{x\to 1} x^2 - 4x + 3$,

(c) $\lim_{x\to 2} x^2 - 2x$,

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-3}$,

(e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-1}$,

(f) $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2-3}$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} 1 + x + \ln x$,

(h) $\lim_{x\to +\infty} x^4 e^x \ln^2 x$,

(i) $\lim_{x\to +\infty} x e^{\frac{1}{x}}$,

(j) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^4-1}$,

(k) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{(x^2-1)(x+2)}$,

(m) $\lim_{x\to 1} \cos\left(e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\right)$,

(n) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{1+\tan\frac{1}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}\right)}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x^2} + x}{\sin x}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sin\frac{1}{x}$,

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$,

(s) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{\frac{2}{x-1}}$,

(t) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+2}$,

(u) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+1}$,

(v) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+x}{x-1}$,

Exercice 6. Calculer les limites suivantes, si elles existent :

(a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^2+1}$,

(b) $\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}}\right)$,

(c) $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{x^2-x}{x+2}}$,

(d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1+\ln x}{\ln x - 1}$,

(e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(xe^x)}{x}$,

(f) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x-2\ln x}{x+\ln x}$,

(g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$,

(h) $\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x}}$,

(i) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{e^{\sqrt{x}}}$,

(j) $\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(x^2e^x\right)$,

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$,

(l) $\lim_{x\to 1^+} (x-1)^{x-1}$,

(m) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$,

(n) $\lim_{x\to 0^+} (\ln x)e^{-\frac{1}{x}}$,

(o) $\lim_{x\to 0^+} x^x$,

(p) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln 3x}}$,

(q) $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln^2 x$,

(r) $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{5x-1}\frac{2x^2+1}{x^2+2x-1}$,

(s) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{\sqrt{x}+\frac{1}{x}+3}}$,

(t) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x+x^2}$,

Exercice 7. Vrai-Faux

Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

(a) Si f est une fonction, alors $f(s+t) = f(s)+f(t)$.

(b) Si f est une fonction alors si $f(s) = f(t)$, on a $s = t$.

(c) Si f est une fonction, $f(2x) = 2f(x)$.

(d) Si $x_1 < x_2$ et f est une fonction strictement décroissante, alors $f(x_1) > f(x_2)$.

(e) Une droite verticale coupe le graphe d'une fonction en au plus un point.

(f) Si f et g sont des fonctions, alors $f \circ g = g \circ f$.

(g) Si f est injective et ne s'annule pas, f est de signe constant.

(h) Si f est injective et ne s'annule pas, alors $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

(i) Si $x > 0$, alors $(\ln(x))^6 = 6 \ln(x)$.

(j) Si $x > 0$ et $a > 1$, alors $\log_\alpha(x) = \ln(\frac{x}{\alpha})$.