Feuille de TD 6 - Analyse de la variable réelle

Questions du cours.

(a) Donner les définitions de continuité d'une fonction en un point, sur un intervalle.

(b) Pour les fonctions usuelles, décrire les intervalles où elles sont continues.

(c) Décrire les opérations sur les fonctions continues (somme, produit, quotient, composition, multiplication par un scalaire).

(d) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(e) Enoncer le théorème de bijectivité pour une fonction continue sur un intervalle.

(f) Décrire le domaine de définition et les propriétés des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et de trigonométrie hyperbolique.

(g) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction continue sur un voisinage épointé d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ soit prolongeable par continuité en x_0.

(h) Enoncer le principe du maximum.

(i) Donner des définitions équivalentes de l'affirmation : la fonction f est dérivable au point x_0.

(j) Montrer qu'une fonction dérivable en un point est toujours continue en ce point. Donner un exemple d'une fonction qui soit continue en un point mais pas dérivable en ce point.

(k) Donner les formules de dérivation de la composée, de la somme, du produit, du quotient, de deux fonctions dérivables.

(l) Enoncer le théorème sur la dérivée de la fonction réciproque d'une bijection dérivable sur un intervalle.

(m) Expliciter les dérivées des fonctions usuelles.

(n) Expliciter les dérivées des fonctions réciproques $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{argch}(x)$, $\operatorname{argsh}(x)$, $\operatorname{argth}(x)$.

(o) Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction dérivable en un extremum local ?

(p) Enoncer le théorème de Rolle.

(q) Enoncer le théorème des accroissements finis, et l'inégalité des accroissements finis.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(a) Montrer en utilisant la définition que $|f|$ est continue.

(b) La réciproque est-elle vraie, *i.e.* si $|f|$ est continue, alors f est-elle continue ?

(c) Montrer en utilisant la définition que $\sup(f, g)$ est continue.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue.

Exercice 3. Étudier les fonctions $f(x) = x^2 - x^{3/2}$ et $g(x) = 3^x - 2^x$ et dessiner leur graphe.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in]-\infty, 1[, \\ x^2 & \text{si } x \in [1, 4], \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x \in]4, +\infty[. \end{cases}$$

(a) Montrer que f est strictement croissante.

(b) Tracer le graphe de la fonction f.

(c) f est-elle continue ?

(d) Montrer que f est bijective.

(e) Caractériser la bijection réciproque f^{-1} de f via une formule.

Exercice 5. (a) Existe-t-il une application $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$f([0,+\infty[) = [-1,0] \cup [1,+\infty[\,?$$

(b) Existe-t-il une application $f\colon [0,1] \to [0,+\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 6. Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ est strictement croissante ; puis montrer que pour tout $y \in]-1,1[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble des points pour lesquels la fonction est dérivable, et calculer sa dérivée.

(a) $3e^x + \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$, (b) $\frac{e^x}{1+x}$, (c) $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$,

(d) $\frac{x-\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$, (e) $\frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$, (f) x^x,

(g) $e^{\alpha \tan(x)}$, (h) $\sin(\sin(\sin x))$, (i) $\cos(\sin(\tan(\pi x)))$,

(j) $\sqrt{\frac{x}{x^2+4}}$, (k) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$, (l) x^{x^x}.

Exercice 8. 1. Préciser, pour chacune des fonctions suivantes, le domaine de définition et la valeur de la fonction.

(a) $\cos(\arccos(x))$, (b) $\sin(\arcsin(x))$, (c) $\tan(\arctan(x))$,

(d) $\mathrm{ch}(\mathrm{argch}(x))$, (e) $\mathrm{sh}(\mathrm{argsh}(x))$, (f) $\mathrm{th}(\mathrm{argth}(x))$,

(g) $\arccos(\cos(x))$, (h) $\arcsin(\sin(x))$, (i) $\arctan(\tan(x))$,

(j) $\mathrm{argch}(\mathrm{ch}(x))$, (k) $\mathrm{argsh}(\mathrm{sh}(x))$, (l) $\mathrm{argth}(\mathrm{th}(x))$.

2. Calculer les dérivées des fonctions $\arccos(x)$, $\arcsin(x)$, $\arctan(x)$, $\mathrm{argch}(x)$, $\mathrm{argsh}(x)$, $\mathrm{argth}(x)$.

3. Calculer, pour tout $x \neq 0$ la valeur de la fonction $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9. Fonctions circulaires réciproques.

(a) Rappeler la définition des fonctions réciproques arctan, arcsin et arccos. En utilisant le théorème de dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective dérivable, calculer les fonctions dérivées de arctan, arcsin et arccos.

(b) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x.$$

(c) Calculer

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

Exercice 10. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{Q}$ est identiquement nulle. Décrire f.

Exercice 11. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes.

(a) $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{x^2+1}$,

(b) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2-1}$,

(c) $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$,

(d) $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$,

(e) $\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 12. Considérons la fonction f définie par

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Calculer la dérivée de f puis montrer que f' n'est pas continue en 0.

Exercice 13. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ si } x \neq 1 \text{ et } f(1) = -\frac{\pi}{2}.$$

(a) Etudier la continuité de f.

(b) Montrer que f est dérivable en tout $x \neq 1$ mais n'est pas dérivable en 1.

(c) Montrer que f' a une limite finie quand x tend vers 1.

(d) Montrer que

$$\forall x > 1, \quad \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{3\pi}{4} + \arctan x.$$

Exercice 14. Déterminer les extrema locaux et globaux sur l'intervalle I pour la fonction f dans les cas suivants :

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ et $I = [2, 4]$,

(b) $f(x) = x\sqrt{1-x}$ et $I = [-1, 1]$,

(c) $f(x) = \frac{3x-4}{x^2+1}$ et $I = [-2, 2]$,

(d) $f(x) = (x^2 + 2x)^3$ et $I = [-2, 1]$,

(e) $f(x) = x + \sin(2x)$ et $I = [0, \pi]$,

(f) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ et $I = [1, 3]$.

Exercice 15. Calculer les limites suivantes.

(a) $\displaystyle\lim_{1} \frac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$,

(b) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\sin(4x)}{\tan(5x)}$,

(c) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\operatorname{sh}(4x)}{\operatorname{th}(5x)}$,

(d) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^x - 1}{x^3}$,

(f) $\displaystyle\lim_{+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{0} \frac{5^x - 3^x}{x}$,

(h) $\displaystyle\lim_{0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$,

(i) $\displaystyle\lim_{1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$,

(j) $\displaystyle\lim_{1} \frac{\cos(x)\ln(x-1)}{\ln(e^x - e)}$,

(k) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$,

(l) $\displaystyle\lim_{0} \frac{\tan(x) - x}{x^3}$,

(m) $\displaystyle\lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$,

(n) $\displaystyle\lim_{1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

(o) $\displaystyle\lim_{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^{\beta x}$.

Exercice 16. Soit f la fonction de variable réelle définie par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

(a) Quel est l'ensemble de définition de f ?

(b) Montrer que f se prolonge par continuité au point 0 en une fonction φ que l'on précisera.

(c) Montrer que φ est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente en 0 au graphe de φ.

(d) Étudier, au voisinage de 0, la position du graphe de φ par rapport à sa tangente.

Exercice 17. On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x + e^x$.

(a) Montrer que f est bijective.

(b) On note g la bijection réciproque de f. Donner le tableau de variations de g avec ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

(c) Que peut-on dire de la continuité et de la dérivabilité de g ?

(d) Déterminer $g'(1)$.

Exercice 18. On considère la fonction $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} - e^{-\frac{1}{x}}.$$

(a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Rappeler soigneusement la définition exacte de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in]\gamma, +\infty[\quad f(x) \leqslant 1.$$

(c) Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g\colon\ [0, +\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

(d) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, \gamma]$ tel que : $\forall x \in [0, \gamma] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.

(e) Montrer que $f(1) < 0$ et que $f(2) > 0$. (Indication : on rappelle que $e > 2$).

(f) À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, déduire de la question précédente que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]1, 2[$.

Exercice 19. Vrai-Faux
Parmi les affirmations suivantes, trouver celles qui sont correctes (en justifiant votre réponse).

(a) Si $f(-1) = f(1)$ alors il existe γ qui vérifie $f'(\gamma) = 0$ et $|\gamma| < 1$.

(b) Si $f'(x) < 0$ sur $]1, 6[$, alors f est strictement décroissante sur $]1, 6[$.

(c) Si $f(x) > 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{0} f(x) = \ell$, alors $\ell > 1$.

(d) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f + g$ est croissante sur I.

(e) Si f et g sont croissantes sur l'intervalle I, alors $f - g$ est monotone sur I.

(f) Si f est continue en α, alors f est dérivable en α.

(g) Si $f'(\gamma) = 0$ alors f admet un extremum local au point γ.

(h) Si f admet un extremum local au point γ, alors $f'(\gamma) = 0$.

(i) Si f est continue sur $]\alpha, \beta[$ alors f admet un minimum et un maximum globaux dans $]\alpha, \beta[$.