Université Paris-Diderot — Année 2014-2015
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Section C

Feuille de TD 7 - Fonctions exponentielles

Une *équation différentielle* du premier ordre est une équation de la forme

$$y'(x) = f(x, y(x)) \text{ pour } x \in I$$

avec f une fonction de deux variables réelles et I un intervalle dans $\mathbb{R}$.
L'inconnue dans cette équation est la fonction dérivable y dont les dérivées vérifient en tout point $x \in I$ l'équation précédente. Sous des hypothèses très larges sur la fonction f, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de caractériser l'existence et l'unicité des fonctions y solutions d'une telle équation.
Un cas très particulier de ce type d'équations est le cas des équations linéaires homogènes du premier ordre. Cela signifie simplement que la fonction f est de la forme $f(x, y(x)) = a(x)y(x)$ avec a une fonction continue en x.
On s'intéresse dans cet exercice aux solutions de l'équation $y'(x) = ay(x)$ lorsque a est une constante réelle et x parcourt $\mathbb{R}$.
Un cas très particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe au moins (en fait exactement) une fonction dérivable y définie sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y'(x) = ay(x)$ et telle que $y(0) = c$, où c est une valeur réelle arbitraire.
La fonction exponentielle (de base e) est précisément définie comme « la » solution de l'équation $y' = y$ telle que $y(0) = 1$. Nous admettrons dans la suite l'existence de cette fonction, que l'on notera $\exp(x)$.
Remarque : Une définition alternative de la fonction exponentielle peut être donnée de la manière suivante : Pour tout nombre réel (ou complexe) x, on peut montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge. On définit alors $\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ comme la limite de cette suite. On peut montrer dans ce cas que $\exp(0) = 1$ et que la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est dérivable et solution de $y' = y$. Cela fournit un procédé concret de construction de la fonction exponentielle.

Propriétés de base de la fonction exponentielle.

1. Soient f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a un nombre réel, et g la fonction définie par $g(x) = f(ax)$. Montrer que g est dérivable et que $g'(x) = af'(ax)$.
2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$.
   (a) Montrer que h est dérivable, calculer sa dérivée, et montrer que h est une fonction constante.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.
   (c) Montrer que la fonction exponentielle est une fonction strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Unicité de la fonction exponentielle.

3. On veut montrer l'unicité de la fonction exponentielle. Supposons que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $y' = y$ et telle que $f(0) = 1$. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) \times \exp(-x)$. Montrer que h est dérivable et constante et égale 1. En déduire que nécessairement, on a $f = \exp$
4. On veut montrer que pour tous nombres réels a et b on a $\exp(a + b) = \exp(a)\exp(b)$. On considère pour cela la fonction $u(x) = \exp(a + x)\exp(-a)$.
   (a) Montrer que cette fonction est dérivable et solution de $y' = y$.
   (b) Calculer $u(0)$ et en déduire le résultat.

Calcul des limites en $+\infty$ et $-\infty$.

5. (a) Montrer que le nombre $e = \exp(1)$ vérifie $e > 1$.
   (b) Montrer que la suite e^n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) En déduire que la fonction exp n'est pas bornée, puis que $\lim\limits_{+\infty} \exp(x) = +\infty$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{-\infty} \exp(x) = 0^+$.
   (e) Dresser le tableau de variations de la fonction exp.

Fonction réciproque.

6. (a) Montrer qu'il existe une unique fonction, notée $\ln\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $(\ln \circ \exp)(x) = x$ et pour tout $t > 0$, on ait $(\exp \circ \ln)(t) = t$.
   (b) Montrer que la fonction ln est continue et strictement croissante.
   (c) Montrer que la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
   (d) Calculer $\ln(1)$ et $\ln(e)$.
   (e) Montrer que pour tous $s > 0$ et $t > 0$, on a $\ln(st) = \ln(s) + \ln(t)$.
   (f) En déduire que pour tout $t > 0$, on a $\ln\left(\frac{1}{t}\right) = -\ln(t)$.
   (g) Calculer $\lim\limits_{0^+} \ln(t)$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln(t)$.
   (h) Dresser le tableau de variation de la fonction $\ln$.

Fonctions puissance.

7. On définit, pour tout nombre réel α, la fonction $f_\alpha\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$.
   (a) Montrer que pour tout α la fonction f_α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
   (b) Déterminer le tableau de variations de f_α en fonction du signe de α.
   (c) Montrer que si $\alpha \neq 0$, la fonction f_α est bijective et calculer sa bijection réciproque.
   (d) Montrer que si $\alpha = n$ est un entier positif ou nul, la fonction f_n peut se prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ tout entier.
   (e) Montrer que si $\alpha = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel, on a, pour tout $x > 0$, $f_\alpha(x) = \sqrt[q]{x^p}$.
   (f) Montrer que si x est fixé, on a $\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f_\alpha(x) = f_{\alpha_0}(x)$.
   On notera dorénavant $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Croissances comparées.

8. Soient $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On souhaite comprendre le comportement de $g_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\exp(\alpha x)}{x^\beta}$ au voisinage de $+\infty$.
   (a) Montrer que si $\beta \leq 0$, alors $\lim\limits_{+\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.

   On supposera désormais que $\beta > 0$, et on s'intéresse à la fonction $g(x) = g_{-1,-1}(x) = x\exp(-x)$.

   (b) Calculer $g'(x)$ et montrer que si $x > 1$, alors $g'(x) < 0$.
   (c) En déduire que sur $]1, +\infty[$, g est décroissante et strictement positive.
   (d) Montrer que g admet une limite finie ℓ en $+\infty$.
   (e) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(2x)}{g(x)} = 0$ et en déduire que $\ell = 0$.
   (f) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{1,1}(x) = +\infty$.
   (g) En posant $t = \alpha x^\beta$, exprimer $g_{\alpha,\beta}(x)$ en fonction de $g_{1,1}(t)$.
   (h) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} g_{\alpha,\beta}(x) = +\infty$.
9. En posant $u = \ln(x)$, déterminer la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x^\alpha}{(\ln(x))^\beta}$ pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.
10. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha(\ln(x))^\beta = 0$.

Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants.

11. Montrer que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'(x) = ay(x)$ est l'ensemble
$$S_\alpha = \{x \mapsto \lambda \exp(\alpha x) | \lambda \in \mathbb{R}\}.$$