Université Paris-Diderot — Année 2014-2015
U1CD35 - Calcul différentiel et topologie — L3 MIASHS

Interrogation écrite 3

20 Novembre 2014

Durée : 50 minutes

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1.

(a) Donner la définition d'une suite de Cauchy sur (X, d_X) un espace métrique.

(b) Que signifie : (X, d_X) est complet ?

(c) Donner un exemple de $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet de dimension infinie.

(d) Donner un exemple de $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé non complet.

(e) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ un réel strictement positif. Donner un exemple explicite d'entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $\dfrac{1}{2n+7} \leqslant \alpha$.

Exercice 2. On considère $\mathbb{R}^2$ muni de la norme un $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\cos(x+y)}{5} - \frac{\sin(3y)}{8}, \frac{1}{10}\big(1 + 2x - y + \sin(y)\big) \right).$$

(a) Montrer que la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer qu'il existe $K \in \,]0,1[$ tel que pour tout $(x,y), (a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f(x,y) - f(a,b)\|_1 \leqslant K \|(x,y) - (a,b)\|_1 .$$

(c) En déduire que le système suivant admet une unique solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2} + \dfrac{\cos(x+y)}{5} - \dfrac{\sin(3y)}{8} \\[2ex] y = \dfrac{1}{10}\big(1 + 2x - y + \sin(y)\big) \end{cases}.$$

Exercice 3. On considère l'espace vectoriel normé $E = (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ où $\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\{|a|, |b|, |c|, |d|\}$. On munit $\mathbb{R}$ de la norme associée à la valeur absolue.
Soient $A = \{M \in E \ : \ |\det M| \leqslant 1\}$ et $B = \{M \in E \ : |\det M| \leqslant 1, \|M\|_\infty = 3\}$.

(a) A est-il fermé ? borné ? compact ? Justifier.

(b) B est-il fermé ? borné ? compact ? Justifier.

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = (\operatorname{tr} M)^2$, où $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.

(c) f est-elle uniformément continue sur B ? Justifier.

(d) Énoncer le critère séquentiel pour la continuité uniforme de f sur A.

(e) Montrer que f n'est pas uniformément continue sur A.

Barème indicatif. Exercice 1 : 5 points, Exercice 2 : 8 points, Exercice 3 : 8 points.