Université Paris-Diderot | Année 2014-2015
U1CD35 - Calcul différentiel et topologie | L3 MIASHS

Interrogation écrite 4

11 Décembre 2014

Durée : 50 minutes

L'usage de tout document ou appareil électronique est strictement interdit.

Exercice 1.

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction, et $p \in \mathbb{R}^n$. Que veut dire : "f est différentiable en p" ?

(b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction. Que veut dire : "f est de classe $\mathcal{C}^1$" ?

(c) Énoncer le théorème de Schwarz.

(d) Soit $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$. Exprimer avec des quantificateurs : "f admet un maximum global".

(e) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, et $p \in \mathbb{R}^3$ un point. Exprimer avec des quantificateurs : "f admet un point de minimum local en p".

Exercice 2. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 6x^2y - 2x^3y + 3x^2y^2$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.

(c) Calculer le gradient ∇f de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

(d) Calculer la hessienne $H(f)$ de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Pour les points $p_1 = (3, 0)$, $p_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $p_3 = (0, 1)$, les valeurs de la hessienne sont données par

$$H(f)(p_1) = 18\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad H(f)(p_2) = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad H(f)(p_3) = 18\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un point critique pour f, et déterminer (si possible) à partir de la valeur de $H(f)(p)$ si p est un point de minimum ou maximum local, pour les points p suivants :

(e) $p = p_1$, (f) $p = p_2$, (g) $p = p_3$.

(h) En étudiant le comportement de $x \mapsto f(x, a)$ avec a un réel bien choisi, montrer que f n'admet ni minimum global ni maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

(i) Question bonus : montrer que l'ensemble des points critiques pour f est donné par $\{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{p_1, p_2\}$. Déterminer quels points de la forme $(0, y)$ sont des maxima ou minima locaux.

Exercice 3. Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\pi\}$. Soit $f : B \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \left|\sin(x^2 + y^2)\right|$.

(a) Étudier le signe de $\sin(x^2 + y^2)$ pour $(x, y) \in B$.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in B \mid x^2 + y^2 \neq \pi\}$.

(c) Calculer le gradient de f en tout point de Ω.

(d) Calculer la dérivée à droite et à gauche de $t \mapsto \left|\sin(t^2)\right|$ en $\sqrt{\pi}$.

(e) Montrer que f n'admet pas de dérivée partielle selon x en $(\sqrt{\pi}, 0)$. Est-ce que f est différentiable sur $(\sqrt{\pi}, 0)$?

Barème indicatif. Exercice 1 : 5 points, Exercice 2 : 8+3 points, Exercice 3 : 7 points.