Université Paris Diderot
2014 - 2015

Lundi 3 novembre 2014

Examen partiel

DURÉE : TROIS HEURES.

L'usage de tout document écrit ou de tout dispositif électronique est strictement prohibé.
Les solutions doivent être rédigées de manière rigoureuse.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.
Le sujet comporte un recto et un verso. Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (*3 points*)**.** Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $X = \mathbb{R}^d$ et N une norme sur X.

1. Justifier pourquoi le fait qu'une partie de X soit N-fermée (resp. N-ouverte) ne dépend pas du choix de la norme N.
2. Ici $X = \mathbb{R}$. Les sous-ensembles suivants de X sont-ils N-fermés ? Sont-ils N-ouverts ? Justifier chaque réponse par la démonstration adéquate.
   (a) $\mathbb{Q}$;
   (b) $]-\infty, -1] \cup [0, 1]$.
3. Ici $X = \mathbb{R}^2$. Mêmes questions pour les parties de X suivantes.
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y \leq 2\}$;
   (b) $\mathbb{R} \times \{1\}$.

Exercice 2. (*4 points*) Soient $\alpha \in]0, 1]$ et f_α l'application définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}^+, |\cdot|), \qquad x \mapsto |x|^\alpha.$$

1. Étudier la fonction $f_{\frac{1}{2}}$ et en dessiner le graphe.
2. *Inégalités.*
   (a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
   (b) Étudier les variations de la fonction $\varphi_\alpha : \mathbb{R}_+ \ni t \mapsto (1 + t)^\alpha - t^\alpha$. En déduire que,
   $$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2 \qquad (a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$
   (c) Déduire de la question précédente que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq u \leq v$
   $$0 \leq v^\alpha - u^\alpha \leq (v - u)^\alpha.$$
   (d) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
   $$\big| f_\alpha(x) - f_\alpha(y) \big| \leq |y - x|^\alpha.$$
3. En utilisant la question précédente, montrer que f_α est uniformément continue.
4. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Montrer que f_α n'est pas lipschitzienne.

Exercice 3 (*4 points*)**.** Soit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à deux lignes et deux colonnes et à coefficients réels. On rappelle que, pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, le déterminant (resp. la trace) de M est $\det M = ad - bc$ (resp. $\operatorname{Tr} M = a + d$).

1. Définir deux normes sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et noter N l'une d'entre elles.
2. Soit $\mathcal{U} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\}$. $\mathcal{U}$ est-il N-ouvert ? N-fermé ? N-compact ?
3. Soit $\mathcal{V} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det M = 1,\ M = {}^tM,\ |\operatorname{Tr} M| \leq \sqrt{5}\}$. $\mathcal{V}$ est-il N-ouvert ? N-fermé ? N-compact ?

Exercice 4 (*4 points*)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = n \exp\left(-\frac{1}{2}\left(|x| - \sqrt{n}\right)^2\right)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'allure du graphe de f_n.
2. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. Calculer $\|f_n - f\|_u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément vers f ?
4. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note g_n la restriction de f_n à K et g la restriction de f à K. Prouver que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g.

Rappel : si g est une application de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la norme uniforme de g est notée $\|g\|_u = \sup_{x\in A} |g(x)|$.

Exercice 5 (*10 points*)**.** On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et à une indéterminée (usuellement noté $\mathbb{R}[X]$). À tout polynôme $P \in E$ on associe la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients, nulle à partir d'un certain rang. Si P est le polynôme nul, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle. Si P n'est pas le polynôme nul, il existe $p \in \mathbb{N} = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$, appelé *degré de* P et l'on écrit $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$ (noter que la sommation est en réalité finie car elle porte sur les entiers $k \leq p$). On pose alors :

$$N_\infty(P) = \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \qquad N_1(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \qquad \text{et} \qquad \|P\| = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

1. Montrer que N_∞, N_1 et $\|\cdot\|$ sont des normes sur E.
2. On note ∂ l'application qui, au polynôme $P \in E$, associe son polynôme dérivé P'.
   Montrer que ∂ est $\mathbb{R}$-linéaire de E dans E.
   Montrer que que ∂ n'est pas continue de (E, N) dans (E, N), dans chacun des trois cas où N vaut N_∞, N_1 ou $\|\cdot\|$.
3. Soit $x \in [0,1]$. On note ev_x l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, au polynôme $P \in E$, associe $\mathrm{ev}_x(P) = P(x)$, la valeur de P en x.
   (a) Vérifier que ev_x est $\mathbb{R}$-linéaire.
   (b) Montrer que ev_x est continue de (E, N_1) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et aussi continue de $(E, \|\cdot\|)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (c) On suppose que $x < 1$. Montrer que ev_x est continue de (E, N_∞) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
   (d) Montrer que ev_1 n'est pas continue de (E, N_∞) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.
4. Prouver que $\mathrm{ev}_0 \circ \partial : P \mapsto P'(0)$ est continue de (E, N_∞) dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. En calculer la norme subordonnée.
5. Soit $d \in \mathbb{N}$. On note $E_d = \mathbb{R}_d[X]$ le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à d. Justifier qu'il existe une constante $C_d \in \mathbb{R}_+$ telle que

   $$\forall P \in E_d \qquad \|P'\| \leq C_d \|P\|.$$

   Montrer que la borne supérieure suivante

   $$\sup_{\substack{P\in E_d \\ P\neq 0}} \frac{\|P'\|}{\|P\|}$$

   est atteinte en au moins un polynôme $P \in E_d$. Prouver que $C_d \geq d$.