QdC.

TD1. a) Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Une norme N sur V (ou $\|\cdot\|$) est une fonction $N : V \to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ qui satisfait les propriétés suivantes :

1) $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

2) $\forall v \in V$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda v) = |\lambda| \cdot N(v)$

3) $\forall u, v \in V$, $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ (inégalité triangulaire)

Le couple (V, N) est dit espace vectoriel normé.

b) Soit V un espace vectoriel, et N_1, N_2 deux normes sur V.

On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si $\exists c, C > 0$ t.q.

$c N_1(v) \leq N_2(v) \leq C \cdot N_1(v) \quad \forall v \in V.$

c) Soit E un ensemble (non vide).

Une distance d sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$ telle que :

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x, y \in E$

3) $\forall x, y, z \in E$, $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Le couple (E, d) est dit espace métrique.

d) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. La norme $\|\cdot\|$ induit une distance d sur V, définie par $d(v,u) = \|v-u\| \quad \forall u, v \in V$.

e) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

La boule fermée de centre $p_0 \in V$ et rayon $r \geq 0$ est $B'(p_0, r) = \{v \in V : \|v - p_0\| \leq r\}$

La boule ouverte de centre $p_0 \in V$ et rayon $r \geq 0$ est $B(p_0, r) = \{v \in V : \|v - p_0\| < r\}$

f) Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie $A \subseteq V$ de V est dite bornée s'il existe une Boule B (de centre 0 et rayon $M < +\infty$) telle que $A \subseteq B$. Autrement dit, si $\exists M \geq 0$ t.q. $v \in A \Rightarrow \|v\| \leq M$.

g) Soit (E, d) un espace métrique, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E (c'est-à-dire, $x_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ou si on veut, $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$).

On dit que la limite (pour n qui tend à l'infini) de x_n est $l \in E$ ~~si~~ (et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = l$) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \ d(x_n, l) \leq \varepsilon.$$

"pour tout marge d'erreur $\varepsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel la distance entre x_n et l est au plus ε.

h) Soit E un ensemble, et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans E.

On peut voir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to E$, $n \mapsto x_n$.

Une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$ fonction strictement croissante.

On peut voir $(x_{n_k})_k$ comme la fonction $\varphi \circ \psi : \mathbb{N} \xrightarrow{\psi} \mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} E$, $k \mapsto n_k \mapsto x_{n_k}$

i) Soit (E,d) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. $l \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = l$.

j) Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subseteq E$ une partie.
Dénotons par $B(x_0,r) = \{x \in E : d(x,x_0) < r\}$ la boule ouverte de centre $x_0 \in E$ et rayon $r > 0$.
On dit que A est un ouvert si $\forall x_0 \in A$, $\exists r > 0$ t.q. $B(x_0,r) \subset A$
On dit que A est fermé si son complémentaire $E \setminus A$ est ouvert.

k) Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subseteq E$ une partie.
· L'intérieur de A, noté $\mathrm{Int}(A)$ ou $\mathring{A}$, est le plus grand ouvert contenu dans A ; $\mathring{A} = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ ouvert}}} U$. $p \in \mathring{A} \iff \exists r > 0$ tel que $\underbrace{B(p,r)}_{\text{boule ouverte}} \subseteq A$.

· L'adhérence de A, notée $\mathrm{Adh}(A)$ ou $\bar{A}$, est le plus petit fermé qui contient A : $\bar{A} = \bigcap\limits_{\substack{C \supseteq A \\ C \text{ fermé}}} C$. $p \in \bar{A} \iff \forall r > 0$, $B(p,r) \cap A \neq \emptyset$.

· La frontière de A notée ∂A, est la différence entre l'adhérence de A et l'intérieur de A : $\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}$.

l) Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subseteq E$ une partie.
On dit que A est dense dans (E,d) si $\bar{A} = E$, c'est-à-dire si $\forall U \neq \emptyset$ ouvert de E, on a $U \cap A \neq \emptyset$.
(ou boule ouverte).

m) Soit (E,d) un espace métrique, et $p \in E$.

Une partie $A \subseteq E$ est dite un voisinage de p s'il existe un ouvert U tel que $p \in U \subseteq A$.

De façon équivalente, si $\exists r > 0$ t.q. $B(p,r) \subseteq A$

boule ouverte de centre p et rayon r.

n) Soit (E,d) un espace métrique, et $A \subseteq E$ une partie.

A est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge (en (E,d)) vers $\ell \in E$, on a que $\ell \in A$.

o) Soit (E,d) un espace métrique et $A \subseteq E$ une partie.

Alors $p \in \bar{A}$ si et seulement si p est la limite d'une suite à valeurs dans A :

$$\bar{A} = \{\text{valeurs d'adhérence des suites } (x_n)_{n \in \mathbb{N}},\ x_n \in A\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

TD 2

a) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f: E \to F$ une fonction. On dit que f est continue en $x_0 \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \text{t.q.} \ \forall x \in E, \ d_E(x, x_0) \underset{(<)}{\leq} \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \underset{(<)}{\leq} \varepsilon.$$

Autrement dit : $\forall V$ voisinage de $f(x_0)$ $\exists U$ voisinage de x_0 tel que $f(U) \subseteq V$.

b) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f: E \to F$ une fonction. On dit que f est continue si elle est continue en x_0 $\forall x_0 \in E$. Autrement dit : $\forall x_0 \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ t.q.

$$\forall x \in E, \ d_E(x, x_0) \underset{(<)}{\leq} \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) \underset{(<)}{\leq} \varepsilon.$$

c) $f: E \to F$ application.

L'image directe de $A \subseteq E$ par f est $f(A) = \{ f(x) \mid x \in A \}$.

L'image réciproque de $B \subseteq F$ par f est $f^{-1}(B) = \{ x \mid f(x) \in B \}$.

Si d_E, d_F sont des distances sur E, F respectivement, $f: (E, d_E) \to (F, d_F)$ est continue si pour tout U ouvert dans F, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E.

On peut remplacé "ouvert" par "fermé" ci dessus (car $f^{-1}(F \setminus U) = E \setminus f^{-1}(U)$)

d) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f: E \to F$ une fonction. f est continue en $x_0 \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments dans E, qui converge vers x_0 ($\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$), alors $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \to f(x_0)$.

e) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une fonction. Alors f est dite uniformément continue si : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in E$, $d_E(x_1, x_2) \underset{(<)}{\leq} \delta \Rightarrow d_F(f(x_1), f(x_2)) \underset{(<)}{\leq} \varepsilon$

$\uparrow$
δ dépend que de ε.

f) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une fonction. Alors f est uniformément continue si et seulement si pour toutes suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E on a que $d_E(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \Rightarrow d_F(f(x_n), f(y_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

g) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques et $f : E \to F$ une fonction. Alors f est $(K-)$lipschitzienne si $\exists K \geq 0$ tel que $\forall x, y \in E$, $d_F(f(x), f(y)) \leq K \cdot d_E(x, y)$.

h) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une fonction lipschitzienne. La constante de Lipschitz de f est la plus petite valeur $K \geq 0$ telle que f est K-lipschitzienne :

$$\mathrm{Lip}(f) = \inf \{ K \geq 0 : d_F(f(x), f(y)) \leq K d_E(x, y) \ \forall x, y \in E \}.$$

i) Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et $f : E \to F$ une fonction. On a que :

f lipschitzienne $\Rightarrow$ f uniformément continue $\Rightarrow$ f continue.

En général, les implications inverses ne valent pas.

j) Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces vectoriels normés, et $L : V \to W$ une application linéaire.

La norme subordonnée de L par rapport à $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ est donnée par

$$[\![L]\!] := \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{\|\ell(v)\|_W}{\|v\|_V} = \sup_{\substack{v \in V \\ \|v\|_V = 1}} \|\ell(v)\|_W \in [0, +\infty].$$

k) Une application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue si et seulement si sa norme subordonnée $[\![L]\!]$ est finie ($< +\infty$).

Si $\dim V < +\infty$, alors $[\![L]\!] < +\infty$ pour toute application linéaire L, donc dans ce cas L est toujours continue.

l) Une application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue $\Leftrightarrow [\![L]\!] < +\infty$.

Dans ce cas L est aussi $[\![L]\!]$-lipschitzienne, car

$$\|\ell(v) - \ell(u)\|_W \underset{L \text{ linéaire}}{=} \|\ell(v-u)\|_W \underset{\text{déf. de } [\![L]\!]}{\leq} [\![L]\!] \cdot \|v-u\|_V.$$

Pour ce qu'on a vu à la question (2.i) on a donc que $\underline{\text{linéaire}}$ L est continue $\Leftrightarrow L$ est uniformément continue $\Leftrightarrow L$ est lipschitzienne $\Leftrightarrow [\![L]\!] < +\infty$.

TD 3

a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to F$, converge ponctuellement vers $f_\infty : E \to F$ si pour tout $x \in E$, on a que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$.

b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : E \to F$, converge uniformément vers $f_\infty : E \to F$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N,\ \forall x \in E$, on a $d_F(f_n(x), f_\infty(x)) < \varepsilon$

Si on définit $d_u(f,g) = \sup_{x\in E} d_F(f(x), g(x))$, où $f, g : E \to F$ deux fonctions, alors la condition équivaut à $d_u(f_n, f_\infty) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par exemple si F est un espace vectoriel normé (norme $\|\cdot\|_F$), alors d_u est la "distance" induit par la "norme" $\|f\|_u = \sup_{x\in E} \|f(x)\|_F$.
(d_u, $\|\cdot\|_u$ pourraient valoir $+\infty$ ...).

c) En générale, la convergence ponctuelle n'implique pas la convergence uniforme. Par exemple $f_n(x) = x^n$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$ converge ponctuellement, mais pas uniformément, vers $f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$.

En revanche, si f_n converge uniformément vers une fonction f_∞, alors f_n converge aussi ponctuellement vers f_∞.

d) Si $f_n : E \to F$ sont continues et f_n converge ponctuellement vers f_∞, on ne peut pas conclure que f_∞ est continue (voir exemple dans (3 c)).

En revanche, la limite uniforme de fonctions continues est continue.

e) Un recouvrement ouvert de $A \subseteq E$, E espace métrique, est une famille d'ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de E, telle que $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supseteq A$.

f) Soit $\{U_\alpha, \alpha\in I\}$ un recouvrement (ouvert) de $A\subseteq E$, E espace métrique. Un sous-recouvrement de $\{U_\alpha\}$ est une sous famille de $\{U_\alpha\}$ (donc $\{U_\beta : \beta\in J\}$, $J\subseteq I$ partie) telle que $\{U_\beta, \beta\in J\}$ est un recouvrement de A (c'est à dire, $\bigcup_{\beta\in J} U_\beta \supseteq A$).

g) Une partie $K\subseteq E$, E espace métrique, satisfait la propriété de Borel-Lebesgue si tout recouvrement ouvert de K admet un sous recouvrement <u>fini</u> (c'est-à-dire $\forall \{\underset{\text{ouverts}}{U_\alpha}, \alpha\in I\}$, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \supseteq K$, $\exists J\subseteq I$, $\# J < +\infty$, t.q. $\bigcup_{\beta\in J} U_\beta \supseteq K$).

Cette propriété caractérise les ensembles compacts.

h) Soit K un compact dans E espace métrique. Alors toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans K ($x_n\in K\ \forall n$) admet une sous-suite convergente (dans K). En formules:

$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$, $\exists$ sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, t.q. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = l \in K$.

i) Une suite décroissante de parties de E espace ~~mé~~ métrique est une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E ($A_n \subseteq E \ \forall n$) telle que

$A_n \supseteq A_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Si E est compact alors ~~toute~~ pour toute suite décroissante $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties <u>fermées</u> de E, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. (c'est à dire que l'intersection de ces parties n'est pas vide).

j) En $\mathbb{R}^n$, ~~les compacts sont~~ K est compact si et seulement si K est fermé et borné.

(Si V est un espace vectoriel de dimension infinie, on a toujours que K compact $\Rightarrow$ K fermé et borné, mais l'implication inverse n'est plus valable en général).

k) En général, toute fonction uniformément continue est aussi continue, mais l'implication inverse n'est pas toujours vraie. Si $f: E \to F$ avec E compact, alors f continue $\Rightarrow$ f uniformément continue (c'est le théorème de Heine).

l) Théorème de Heine : Soient (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques, et $f: E \to F$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue.

a) Soit (X,d_X) un espace métrique, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans X. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dit de Cauchy si :

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall n,m\geq N$, $d_X(x_n,x_m)\underset{(<)}{\leq}\varepsilon$. ou de même façon :

$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall n\geq N, p\geq 0$, $d_X(x_n,x_{n+p})\underset{(<)}{\leq}\varepsilon$.

b) En général, il existe des suites de Cauchy dans (X,d_X) qui ne sont pas convergentes. (si (X,d_X) n'est pas complet). En revanche, toute suite convergente est de Cauchy.

c) Un espace métrique (X,d_X) est ~~dit~~ complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans X converge (vers une valeur $x_\infty\in X$).

d) Tout espace compact est aussi complet. (car si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X compact, alors $\exists (x_{n_k})$ sous-suite convergente, et la propriété de Cauchy entraîne que (x_n) est aussi convergente).
En revanche, ils existent des espaces complets qui ne sont pas compacts (par exemple $\mathbb{R}$).
(En effet, X est compact $\Leftrightarrow$ X est complet et précompact (ou totalement borné))
(précompact : $\forall\varepsilon>0$, X admet un recouvrement fini par boules ouvertes de rayon ε).

e) Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(V,\|\cdot\|)$, complet par rapport à la distance induite par $\|\cdot\|$.

f) Une application $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ ~~des~~ qui agit sur un espace métrique (X, d_X) est dite une contraction si $\exists k \in [0, 1[$ t.q. pour tout $(x,y) \in X$, on a $d_X(f(x), f(y)) \leq k \cdot d_X(x,y)$.

c'est-à-dire, si f est k-Lipschitzienne avec $0 \leq k < 1$

g) les contractions sont les fonctions k-Lipschitziennes avec $k < 1$ définies d'un espace métrique (X, d_X) vers lui-même.

h) Théorème du point fixe de Banach :

Soit (X, d_X) un espace métrique complet, et $f : (X, d_X) \to (X, d_X)$ une contraction. Alors $\exists ! \, x \in X$ point fixe pour f, c'est à dire, t.q. $x = f(x)$.

a) $\underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $p_0 \in \Omega$. f est différentiable en p_0 si

$\exists\, L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ application linéaire telle que :

$$\lim_{p \to p_0} \frac{|f(p) - f(p_0) - L(p-p_0)|}{\|p-p_0\|} = 0,$$ où $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme dans $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas

L est dite la différentielle de f en p_0.

Le gradient de f en p_0 est le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)\right) \in \mathbb{R}^n$ $=: \nabla f(p_0)$.

Il satisfait la propriété $$df_{p_0}(p-p_0) = \nabla f(p_0) \cdot (p-p_0)$$

produit scalaire.

b) $\underset{\text{ouvert}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $p_0 \in \Omega$. f est différentiable en p_0 si

$\exists\, L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ application linéaire telle que :

$$\lim_{p \to p_0} \frac{\|f(p) - f(p_0) - L(p-p_0)\|_W}{\|p-p_0\|_V} = 0,$$ où $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ sont n'importe quelles normes dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

L est dite la différentielle de f en p_0, et notée df_{p_0} (ou $df(p_0)$).

c) $f : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ fonction entre espaces vectoriels normés, $p_0 \in E$. On dit que f est différentiable en p_0 s'il existe une application linéaire <u>continue</u> $L : V \to W$ telle que :

$$\lim_{p \to p_0} \frac{\|f(p) - f(p_0) - L(p-p_0)\|_W}{\|p-p_0\|_V} = 0.$$ L est dite la différentielle de f en p_0, et notée df_{p_0} ou $df(p_0)$.

d) Toute fonction différentiable est continue :

À partir de la définition de différentiable, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. si $\|p-p_0\|_V < \delta$ on a :

$$\|f(p)-f(p_0)-L(p-p_0)\|_W \leq \varepsilon \|p-p_0\|_V . \Rightarrow \|f(p)-f(p_0)\|_W \leq \underset{\underset{0}{\downarrow}\,(L\text{ continue})}{\|L(p-p_0)\|_W} + \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\varepsilon\|p-p_0\|_V} \text{ si } p \to p_0.$$

Par contre, il y a des fonctions continues qui ne sont pas différentiables (par exemple $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$).

e) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. La dérivée ~~par~~ directionnelle de f en p le long v est la dérivée de la fonction $g_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h \mapsto f(p+hv)$ en 0, c'est à dire, la limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(p+hv)-f(p)}{h}$.

La dérivée partielle par rapport à x_j $j=1..n$ est la dérivée directionnelle le long la direction $e_j = (0 \dots 0, \underset{\underset{j\text{'ème position}}{\uparrow}}{1}, 0 \dots 0)$. Elle est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \dots, x_n) - f(p)}{h}.$$

f) Soit $f : V \to W$ une fonction différentiable en $p_0 \in V$. Alors les dérivées ~~partielles~~ directionnelles existent en toute direction $v \in V \setminus \{0\}$.

Si $c_v : \mathbb{R} \to V$ est donnée par $c_v(t) = v.t + p$ alors la dérivée directionnelle de f le long v est donnée par $d(f \circ c_v)_0 = df_p \cdot v$

Par exemple, si $V = \mathbb{R}^n$ et $W = \mathbb{R}$, la dérivée partielle le long v ~~dans~~ en p est la valeur $\nabla f(p) \underset{\underset{\text{produit scalaire.}}{\uparrow}}{\cdot} v$

L'existence des dérivées directionnelles, même en toutes directions, ne garantissent pas que l'application est différentiable.

Par contre si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et les dérivées partielles existent au voisinage de p et sont continues en p, alors f est différentiable en p

(si $n=2$: $\dfrac{\left| f(x+h,y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k \right|}{\|(h,k)\|} \leq$ $\quad (p=(x,y))$

$$\leq \underbrace{\frac{\left| f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y)\,k \right|}{\|(h,k)\|}}_{\to 0 \ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \text{ existe au voisinage de } p\right)} + \underbrace{\frac{\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x+h,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| k}{\|h,k\|}}_{\to 0 \ \left(\frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue en } p\right)} +$$

$$\underbrace{\frac{\left| f(x+h,y) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h \right|}{\|(h,k)\|}}_{\to 0 \ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ existe en } p\right)} \to 0.$$

(les limites sont pour $\|(h,k)\| \to 0$).

g) L'application $f : V \to W$ est de classe C^1 si elle est différentiable en tout point, et l'application $p \mapsto df_p$ (de V à $\mathcal{L}(V,W)$) est continue.

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, cette condition est équivalente au fait que f admet dérivées partielles en tout point p, et les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues.

h) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en p, et $df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sa différentielle en p

La matrice jacobienne de f en p est la matrice qui représente df_p. C'est à dire, si $f=(f_1,..,f_m)$, la matrice jacobienne est donnée par:

$$\mathrm{Jac}(f)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}_{m\times n} \in \mathcal{M}(m\times n, \mathbb{R})$$

i) ~~Soit~~ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ application différentiable en p. La formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste de Peano (notation de Landau) nous dit que: $(f=(f_1..f_m))$.

$f(q) = f(p) + df_p(q-p) + o(\|q-p\|)$. ~~[illegible]~~ Si on remplace ~~par~~ $f(q)$ par les coordonnées $(y_1 -- y_m)$, et $q=(x_1 -- x_n)$, et on enlève les termes d'ordre supérieure ($o(\|q-p\|)$), on obtient le système d'équations du plan tangent au graphe Γ_f de f, donné en coordonnées par: $(p=(p_1 -- p_n))$

$$y_j = f_j(p) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(p)\cdot(x_1-p_1) + \cdots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}(p)(x_n-p_n) \quad \text{pour } j=1..n.$$

j) Théorème des accroissements finis: Soit $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, f une fonction, $a,b \in \Omega$, f continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$. Alors $\exists\, \xi \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = \nabla f(\xi)\cdot(b-a)$.

k) Inégalité des accroissements finis. Soit $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert $a,b \in \Omega$. f continue sur $[a,b]$ et différentiable sur $]a,b[$. Soient $\|\cdot\|_V$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_W$ sur $\mathbb{R}^m$, et $[\![\cdot]\!]$ la norme subordonnée associée sur $\mathcal{L}(\underset{\mathbb{R}^n}{V}, \underset{\mathbb{R}^m}{W})$. Alors

$$\|f(b)-f(a)\|_W \le \sup_{\xi\in]a,b[} [\![df_\xi]\!]\cdot\|b-a\|_V.$$

TD 6

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonction.

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $I \in \{1, \dots, n\}^p$ un multi-indice; $I = (i_1 \dots i_p)$ $i_j \in \{1 \dots n\}$.
La dérivée partielle d'ordre p associée à I est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_p}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{p-1}}}\left(\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\cdots\right)\right) : \Omega \to \mathbb{R}.$$

On la note aussi $\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_p} \partial x_{i_{p-1}} \cdots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ $\left(\text{ou } \dfrac{\partial^p f}{\partial^p x_I}\right)$.

b) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet les dérivées partielles d'ordre 2 en $p \in \Omega$. Alors la matrice hessienne de f en p est la matrice

$$H(f)(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(p) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{i,j} \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$$

(on appelle hessien son déterminant).

c) Théorème de Schwarz : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. $(*)$
Si les dérivées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent et sont <u>continues</u> sur un point $p \in \Omega$,
alors on a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p)$. (l'ordre de dérivation ne compte pas).

d) Par le théorème de Schwarz $(*)$, si les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues en p, alors la matrice hessienne de f en p est symétrique.

$(*)$ Variante sur les hypothèses : 1) f est deux fois différentiable en p, implique par :
2) f est $\mathcal{C}^2$. Ces deux hypothèses sont bien aussi

e) Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\underset{\text{ouvert}}{\Omega \subseteq \mathbb{R}^n}$ est de classe C^2 si les dérivées partielles d'ordre 2 existent et sont continues sur Ω.

Si $F = (f_1 \ldots f_m) : \Omega \to \mathbb{R}^m$, F est de classe C^2 si $f_j : \Omega \to \mathbb{R}$ sont continues pour tout $j = 1 \ldots m$.

f) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, définie au voisinage de $p \in \Omega$.
On dit que p est un point de maximum (minimum) local si $\exists U \overset{\subset \Omega}{\text{voisinage}}$ de p tel que $f(q) \leq f(p)$ $\forall q \in U$.
$(f(q) \geq f(p))$ pour le min

Les extrema locaux sont les points de maximum ou minimum locaux pour f.

g) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $p \in \Omega$ est un point de maximum (resp. minimum) global pour f si $f(q) \leq f(p)$ (resp. $f(q) \geq f(p)$) pour tout $q \in \Omega$.
Les extrema globaux sont les points de minimum ou maximum globaux

h) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, et $p \in \Omega$.

- Si p est un extremum local, et f est différentiable en p, alors $\nabla f(p) = 0$.
- Si p est tel que f est différentiable deux fois en p, $\nabla f(p) = 0$ et
  - $H(f)(p)$ est définie positive
  - $H(f)(p)$ est définie négative

  Alors p est un point de
  - minimum
  - maximum

  local pour f.

i) Une matrice symétrique $M \in \mathcal{M}(n\times n, \mathbb{R})$ est dite

- définie positive si les valeurs propres de M sont >0.
- " négative si " " <0

(semi-définie positive si " " ≥ 0
" négative " " ≤ 0)

j) Soit $f : \underset{\text{ouvert}}{\underbrace{\Omega}} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \Omega$

La formule de Taylor avec reste intégral est la suivante :

ordre 0 : si f est $\mathcal{C}^1$, $f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \nabla f(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x-x_0)\, dt$

produit scalaire

ordre 1 : si f est $\mathcal{C}^2$, $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \int_0^1 (1-t)\, {}^t(x-x_0) \cdot H(f)(x_0 + t(x-x_0))(x-x_0)\, dt$

produit des matrices

Par exemple si $n=2$, on a :

ordre 0 : $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))(y-y_0) \right) dt$

ordre 1 : $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) +$

$$+ \int_0^1 (1-t) \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))\cdot(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))\, 2(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial y^2}(x_0 + t(x-x_0), y_0 + t(y-y_0))(y-y_0)^2 \right] dt.$$

k) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \Omega$. La formule de Taylor (reste de Peano / notation de Landau)
(il suffit différentiable 1/2 fois)

ordre 1 : si f est $\mathcal{C}^1$, $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + o(\|x-x_0\|)$.

ordre 2 : si f est $\mathcal{C}^2$, $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}\, {}^t(x-x_0)\cdot Hf(x_0)(x-x_0) + o(\|x-x_0\|^2)$

Où $o(\|x-x_0\|^r)$ est une fonction g définie au voisinage de x_0 telle que
$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\|x-x_0\|^r} = 0.$$

Si $n=2$, on obtient :

ordre 1 : $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k + o(\|(h,k)\|)$

ordre 2 : $f(x+h, y+k) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot k +$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\cdot h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\cdot h\cdot k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\cdot k^2\right] + o(\|(h,k)\|^2).$$

l) Soit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ deux fonctions, f définie au voisinage de $p_0 \in \mathbb{R}^n$, et g définie au voisinage de $q_0 = f(p_0) \in \mathbb{R}^m$.

- Si f est différentiable en p_0, et g est différentiable en q_0, alors $g\circ f$ est différentiable en p_0, et $d(g\circ f)(p_0) = dg(f(p_0))\circ df(p_0)$

Pour les matrices associées, on a
$$\underset{l\times n}{\mathrm{Jac}(g\circ f)(p_0)} = \underset{l\times m}{\mathrm{Jac}(g)(f(p_0))} \underset{\substack{\text{produit}\\\text{des}\\\text{matrices}}}{\cdot} \underset{m\times n.}{\mathrm{Jac}(f)(p_0)}$$

- Si f et g sont deux fois différentiables en p_0 et q_0, alors $g\circ f$ est deux fois différentiable en p_0. Si $\underset{l=1 \text{ et}}{} \nabla g(q_0) = 0$, alors

$l=1$ et

$$H(g\circ f)(p_0) = {}^t\!\left(df(p_0)\right)\cdot H(g)(f(p_0))\cdot df(p_0).$$

Ces formules découlent de la formule de Taylor à l'ordre 1 et 2.

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme local ($\mathcal{C}^1$) au point $p_0 \in \mathbb{R}^n$ si il existe un voisinage U de p_0 tel que $f|_U : U \to f(U)$ est un difféomorphisme, c'est à dire $f|_U$ est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$ et sa réciproque est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le théorème d'inversion locale dit que cette condition est équivalent à dire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de p_0, et le déterminant jacobien J_f satisfait $J_f(p_0) \neq 0$.

b) $f : A \to B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. f est un difféomorphisme global ($\mathcal{C}^1$) si f est bijective, de classe $\mathcal{C}^1$, et f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$).

c) Théorème d'inversion locale. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ (au voisinage de $p_0 \in \mathbb{R}^n$). Si $df_{p_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est inversible (c'est à dire, si $J_f(p_0) \neq 0$), alors $\exists\, U$ voisinage de p_0 tel que $f|_U : U \to f(U)$ est une bijection, et sa bijection réciproque $g : f(U) \to U$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus :

d) $dg(f(p_0)) = (df(p_0))^{-1}$, c'est à dire la différentielle de g en $\underset{q_0}{\underset{\shortparallel}{f(p_0)}}$ est l'inverse de $df(p_0)$. On peut aussi écrire,

$$dg(q_0) = \Big(df(\underset{g(q_0)}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}(q_0)}})\Big)^{-1}.$$

e) Théorème des fonctions implicites :

Soit $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ une fonction (définie et) de classe C^1 au voisinage de $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Ecrivons la différentielle de f en p_0 en blocs :

$$\underset{\uparrow}{df_{p_0}} = \left(\frac{df}{dx}(p_0) \middle| \frac{df}{dy}(p_0) \right)$$

matrice $m \times (n+m)$

où $\frac{df}{dx}(p_0)$ est une matrice $m \times n$, et

$$\left(\frac{df}{dx}(p_0)\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p_0). \quad \begin{matrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n \end{matrix}$$

et $\frac{df}{dy}(p_0)$ est une matrice $m \times m$, $\left(\frac{df}{dy}(p_0)\right)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(p_0)$ $\begin{matrix} i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots m. \end{matrix}$

Ici $(\overbrace{x_1 \ldots x_n}^{x}, \overbrace{y_1 \ldots y_m}^{y})$ sont des coordonnées de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$.

Le théorème dit que si $\frac{df}{dy}(p_0)$ est inversible, alors $\exists\, U$ voisinage de x_0, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, et $g : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tel que :

$$\{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^m \mid f(x,y) = \underset{f(p_0)}{\underset{\shortparallel}{c}}\} = \{(x, g(x)) \in U \times \mathbb{R}^m \mid x \in U\}.$$

C'est à dire, le lieu de $\{f(x,y) = c\}$ est localement donné par le graphe de g. De plus,

f) La différentielle de g en x_0 est donnée par :

$$\underset{\uparrow}{dg_{(x_0)}} = - \underset{\uparrow}{\left(\frac{df}{dy}(p_0)\right)^{-1}} \circ \underset{\uparrow}{\frac{df}{dx}}(p_0).$$

matrice $m \times n$. $\quad m \times m \quad \cdot\, m \times n$.

g) $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$, de classe C^1, $c \in \mathbb{R}^n$, $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid f(x,y) = c \}$.

p_0 est un point régulier de S si $p_0 \in S$ et df_{p_0} est de rang maximal (c'est à dire de rang m, car df_{p_0} est représenté par une matrice $m \times (n+m)$)

~~Le théorème de la fonction implicite nous dit que cela implique~~

À permutation de coordonnées près, on peut supposer que le mineur de rang maximal est donné par les dernières m colonnes de df_{p_0}. (ou plutôt de $Jac(f)(p_0)$, on a fixé des coordonnées ...).

donc on a $$df_{p_0} = \left(\frac{df}{dx}(p_0) \,\middle|\, \underbrace{\frac{df}{dy}(p_0)}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times m \text{ inversible}}} \right)$$

Par le théorème des fonctions implicite, on peut donc exprimer localement en p_0 le lieu S comme le graphe d'une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1.

h) $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, $c \in \mathbb{R}^m$, $S = f^{-1}(\{c\})$, p_0 point régulier de S. Alors l'hyperplan H_{p_0} tangent à S en p_0 est décrit par : $H_{p_0} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid df_{p_0}(x - x_0, y - y_0) = 0 \}$.

Exemple: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad c = 1 \quad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=1\}$
$(x,y,z) \mapsto x^2+y^2-z^2 \quad = f^{-1}(\{1\})$.

$p_0 = (1,1,1) \in S$. $\quad df = (2x, 2y, -2z)$. $\quad df_{p_0} = (2,2,-2)$. ($p_0$ régulier)

$$H_{p_0} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2(x-1)+2(y-1)-2(z-1)=0\}$$
$$\Updownarrow$$
$$x+y-z-1=0.$$

i) $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ voisinage de x_0.

Alors $f(\Omega)$ admet toujours un "espace tangent" en $f(x_0)$, qui, par la formule de Taylor est décrit par $H_{f,x_0} = \{y = (y_0 + df_{x_0}(x-x_0)) : x \in \mathbb{R}^n\}$

(x paramètres libres, y coordonnées dans $\mathbb{R}^m$).

$H_{f(x_0)}$ a dimension n ssi df_{x_0} a rang $= n$.

En particulier cette condition est jamais vérifiée si $n > m$.

Exemple: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad$ (classe C^∞). $\quad df = \begin{pmatrix} 2s & 0 \\ t & s \\ 0 & 2t \end{pmatrix}$
$(s,t) \mapsto (s^2, st, t^2)$.

Si $x_0 = (1,0)$, alors $df_{x_0} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2, et

$$H_{f,(1,0)} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s-1 \\ t-0 \end{pmatrix}, \ (s,t) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(s-1) \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En revanche si $x_0 = (0,0)$, on aurait $df_{x_0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de rang 0.

et l'ensemble $M_{f(0,0)}$ nous donne $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ qui n'est pas de dimension 2 (mais 0).

j) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $S = g^{-1}(\{0\})$.

Un extremum de f lié à S est un extremum de $f|_S$.

k) Théorème du multiplicateur de Lagrange:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $S = g^{-1}(\{0\}) \subset \mathbb{R}^n$ $\quad g = (g_1, \dots g_m)$

Supposons que $p_0 \in \mathbb{R}^n$ soit un point d'extremum de f lié à S.

Si f est de classe C^1 au voisinage de p_0, g est de classe C^1 au voisinage de p_0, et p_0 est un point régulier de S, alors:

$\exists \underset{(\lambda_1 \dots \lambda_m)}{\underset{\shortparallel}{\lambda}} \in \mathbb{R}^m$ tel que $\nabla f(p_0) + \underline{\lambda_1 \nabla g_1(p_0) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(p_0)} = 0$

Autrement dit, si $F : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$, alors $\nabla F(p) = 0$.
$(x, \lambda) \mapsto f(x) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{produit scalaire}}}{\lambda \cdot g(x)}$

Ce valeur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ est dit multiplicateur de Lagrange.

l) Si x_0 n'est pas un point régulier, ce n'est pas forcement le cas. Meme s'il l'est, la condition décrite est exactement celle du point (k):

La condition est nécessaire, mais pas suffisante (comme dans le cas des extrema sans le lien).

Donc non, x_0 n'est pas forcement un extremum local de $f|_S$