TD 1 - Normes et topologie

Questions de cours.

(a) Donner la définition de la norme sur un espace vectoriel et d'un espace vectoriel normé.

(b) Quand dit-on que deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes ?

(c) Donner la définition d'une distance et d'un espace métrique.

(d) Définir la distance induite par une norme.

(e) Définir boule fermée et boule ouverte dans un espace vectoriel normé.

(f) Qu'appelle-t-on partie bornée d'un espace vectoriel normé ?

(g) Définir la limite d'une suite.

(h) Qu'appelle-t-on sous-suite (ou suite extraite) ?

(i) Qu'appelle-t-on valeurs d'adhérence d'une suite ?

(j) Donner la définition d'un ouvert et d'un fermé d'un espace métrique.

(k) Qu'appelle-t-on intérieur, adhérence et frontière d'une partie d'un espace métrique ?

(l) Quand dit-on qu'une partie d'un espace métrique est dense ?

(m) Donner la définition d'un voisinage (d'un point) dans un espace métrique.

(n) Donner un critère séquentiel pour vérifier que une partie d'un espace métrique est fermée.

(o) Quel est le lien entre l'adhérence d'une partie d'un espace métrique et les valeurs d'adhérences des suites ?

Exercice 1. Soit $V = \mathbb{R}^2$. Pour $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$\|v\|_1 := |x| + |y|, \qquad \|v\|_2 := \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \|v\|_\infty := \max\{|x|, |y|\}.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes de $\mathbb{R}^2$.

(b) Quelle est la figure géométrique formée par la boule fermée de centre 0 et rayon 1 pour chacune de ces normes ?

(c) $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ définissent-elles des normes sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$?

Exercice 2. Soient $V = \mathbb{R}^2$ et $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ les normes définies dans l'Exercice 1. Montrer les inégalités ci-dessous valables pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Prouver grâce à des exemples bien choisis que ces inégalités ne peuvent être améliorées.

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_1 \le \|v\|_2 \le \|v\|_1$, (b) $\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le \sqrt{2}\,\|v\|_2$,

(c) $\frac{1}{2}\|v\|_1 \le \|v\|_\infty \le \|v\|_1$, (d) $\|v\|_\infty \le \|v\|_1 \le 2\,\|v\|_\infty$,

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\|v\|_2 \le \|v\|_\infty \le \|v\|_2$, (f) $\|v\|_\infty \le \|v\|_2 \le \sqrt{2}\,\|v\|_\infty$.

En déduire que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes équivalentes.

Exercice 3. Soit E un ensemble non vide. Pour tout $x, y \in E$, soit $d_{\text{triv}}(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$

(a) Montrer que d_{triv} est une distance sur E (appelée *distance triviale* ou *discrète*).

(b) Soit $x \in E$. Décrire la d_{triv}- boule ouverte et fermée de centre x et rayons $\frac{1}{2}$, 1 et 2.

Exercice 4. Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$ et $\|\cdot\|$ une norme sur V. Pour tout $p \in V$ et $r \in \,]0, +\infty[$ soient

$$B(p, r) = \{v \in V \mid \|v - p\| < r\}, \qquad B'(p, r) = \{v \in V \mid \|v - p\| \le r\},$$

respectivement la boule ouverte et fermée de centre p et rayon r.

(a) Montrer que $B(p, r) = \mathrm{Int}(B'(p, r))$, c'est-à-dire que la boule ouverte est la partie intérieure de la boule fermée (de même centre et rayon).

(b) Montrer que $B'(p,r) = \overline{B(p,r)}$, c'est-à-dire que la boule fermée est l'adhérence de la boule ouverte (de même centre et rayon).

(c) Remarquer que $\partial B'(p,r) = B'(p,r) \setminus B(p,r) = \{v \in V \mid \|v-p\| = r\}$.

(d) Soit d_{triv} la distance discrète définie dans l'Exercice 3. Est-ce que ces propriétés sont toujours valables si on remplace $\|v-p\|$ par $d_{\text{triv}}(v,p)$?

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}$ muni de la norme donnée par la valeur absolue, déterminer intérieur, adhérence et frontière de chacun des sous-ensembles suivants.

(a) $A = \{2,4,5\}$, (b) $B = [1,3] \cup \{\pi\}$, (c) $C = [-1,1[\cup \{3\}$,

(d) $D = \mathbb{Z}$, (e) $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{\frac{1}{n}\}$, (f) $F = \mathbb{Q}$,

(g) $G = [1,4] \setminus \mathbb{Q}$, (h) $H = \bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}} \{\cos(2\pi\alpha)\}$. (i) $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, déterminer si chaque ensemble est ouvert, fermé, borné. En déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière.

(a) $A = \{2,4,5\} \subset \mathbb{R}$, (b) $B = [1,3] \times \{2\} \subset \mathbb{R}^2$, (c) $C = [-1,1[\times]-1,1] \subset \mathbb{R}^2$,

(d) $D = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$, (e) $E = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [2n, 2n+1] \subset \mathbb{R}$, (f) $F = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$,

(g) $G = ([3,5] \setminus \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, (h) $H = \mathbb{R}^2$, (i) $I = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[\subset \mathbb{R}$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, déterminer intérieur, adhérence et frontière des sous-ensembles suivants. Quels sous-ensembles sont denses ou bornés ?

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 2\}$,

(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \geq 1\}$, (d) $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - x^2 \geq 0, y > x\}$,

(e) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$, (f) $F = \mathbb{Q}\times\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit V un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous-ensemble $E \subseteq V$ peut-il être à la fois borné et dense ? Si oui, sous quelle condition ? Justifier soigneusement la réponse.

Exercice 9. Soient $\|\cdot\|$ une norme sur un espace vectoriel V et d la distance induite par $\|\cdot\|$. Pour tout $p \in V$ et $r \geq 0$, notons $B'(p,r) = \{x \in V \mid d(x,p) \leq r\}$ la boule fermée de centre p et rayon r. Montrer que, pour tout sous-ensemble A de V et tout $p \in V$, on a

$$d(p,A) = \inf\{r \geq 0 \mid B'(p,r) \cap A \neq \emptyset\} = \sup\{r \geq 0 \mid B'(p,r) \cap A = \emptyset\},$$

où l'on suppose que $\sup\emptyset = 0$ et $\inf\emptyset = +\infty$. Cette même propriété reste-t-elle vraie si on remplace les boules fermées par les boules ouvertes ?

Exercice 10. Soient $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ les trois normes sur $\mathbb{R}^2$ définies dans l'Exercice 1. Notons par d_1, d_2, d_∞ les distances induites et $B_1'(p,r)$, $B_2'(p,r)$, $B_\infty'(p,r)$ les boules fermées de centre p et rayon r par rapport à ces distances. Soient

$$p = (2,3), \quad a = (0,0), \quad b = (4,-3), \quad c = (6,2),$$

$$A = B_1(a,1), \quad B = B_2(b,3), \quad C = B_\infty(c,2), \quad s = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x+4\}.$$

(a) Dessiner sur le plan cartésien les points p, a, b et c ainsi que les ensembles A, B, C et s. Quelles figures obtient-on ?

Calculer les valeurs suivantes :

(b) $\|p\|_\infty$, $\|p\|_2$, $\|p\|_1$, (c) $d_\infty(p,A)$, $d_2(p,A)$, $d_1(p,A)$,

(d) $d_\infty(p,C)$, $d_2(p,C)$, $d_1(p,C)$, (e) $d_\infty(p,B)$, $d_2(p,B)$, $d_1(p,B)$,

(f) $d_\infty(a,B)$, $d_2(a,B)$, $d_1(a,B)$, (g) $d_\infty(p,s)$, $d_2(p,s)$, $d_1(p,s)$.

Exercice 11. $\mathbb{C}$ est muni de la norme donnée par la fonction *module*. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = \lambda^n.$$

On note $E_\lambda = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\lambda^n\}$ l'ensemble des valeurs prises par la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Soit $\lambda = 0$. Déterminer E_0. Est-il ouvert/fermé ?

(b) Supposons que $0 < |\lambda| < 1$. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire l'adhérence de E_λ. E_λ est-il ouvert/fermé ?

(c) Supposons que $|\lambda| > 1$. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire l'adhérence de E_λ. E_λ est-il ouvert/fermé ?

(d) Supposons que $|\lambda| = 1$ et que λ est une racine de l'unité, i.e. il existe $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = e^{2\pi \mathrm{i} \frac{p}{q}}$. Combien d'éléments possède E_λ ? E_λ est-il ouvert/fermé ?

(e) Supposons que $|\lambda| = 1$ et que λ n'est pas une racine de l'unité, i.e. il existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $\lambda = e^{2\pi \mathrm{i}\alpha}$. Déterminer l'adhérence de E_λ.

Dessiner dans le plan cartésien l'allure de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans tous les cas précédents.

Exercice 12. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ la suite à valeurs réelles telle que $x_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Trouver une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} > 0$ pour tout k.

(b) Trouver une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} < 0$ pour tout k.

(c) Trouver les points d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ou non de limite.

(d) Mêmes questions pour la suite de terme général $y_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{6}$ et $z_n = (-2)^{-n}$.

Exercice 13. Considérons le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé $\mathbb{R}$ muni de la norme euclidienne. Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Montrer que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de la distance triviale d_{triv} définie dans l'Exercice 3. Montrer que $E \subseteq V$ est dense dans V si et seulement si $E = V$.

Normes classiques sur $\mathbb{R}^n$

Soit $p \in [1, +\infty[$. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \{|x_i|\}.$$

Exercice 15 (Inégalités). Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) Pour tout $a, b \in]0, +\infty[$, montrer l'inégalité suivante :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \qquad \text{(Inégalité de Young)}$$

Indications : utiliser la relation $x = e^{\ln x}$ et le fait que l'exponentielle est convexe ; ou prouver l'inégalité $t^\alpha - 1 \leq \alpha(t-1)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et tout $\alpha \in [0, 1]$ et l'utiliser avec $\alpha = p^{-1}$ et $t = \frac{\max\{a,b\}}{\min\{a,b\}}$.

(b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tels que $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq 1.$

(c) Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \qquad \text{(Inégalité de Hölder)}$$

Indication : appliquer le point précédent à $\frac{x}{\|x\|_p}$ et $\frac{y}{\|y\|_q}$.

(d) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Remarquer que $\langle x, x \rangle = \|x\|_2^2$. Déduire du point précédent l'inégalité suivante :

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle^2 \langle y, y \rangle^2. \qquad \text{(Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

(e) Déduire de l'inégalité de Hölder que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \max \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \; : \; y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q = 1 \right\}. \qquad \text{(Formule variationnelle)}$$

(f) À l'aide de l'inégalité de Hölder, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, montrer l'inégalité suivante :

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p . \qquad \text{(Inégalité de Minkowski)}$$

Indication : utiliser $|x_i + y_i|^p \leq \big(|x_i| + |y_i|\big)|x_i + y_i|^{p-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ ou utiliser la question précédente.

Exercice 16. (a) À l'aide de l'inégalité de Minkowski, montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\lim_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a : $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty$.
En déduire que les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes équivalentes pour $p \in [1, +\infty]$.

Espaces vectoriels de dimension infinie

Exercice 17 (Normes sur $\mathcal{C}([0, 1])$). Soit $\mathcal{C}([0, 1])$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à valeurs réelles. Pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on pose

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt, \qquad \|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|\, dt.$$

(a) Rappeler pourquoi $\mathcal{C}([0, 1])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{C}([0, 1])$ et que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ si $f \in \mathcal{C}([0, 1])$.

Considérons la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathrm{C}([0, 1])$ donnée par $f_n(t) = t^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$.

(c) Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans l'espace vectoriel normé $(\mathrm{C}([0, 1]), \|\cdot\|_1)$.

(e) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans l'espace vectoriel normé $(\mathrm{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Topologie

Soient E une ensemble non vide et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$ une famille de sous-ensembles de E satisfaisant les propriétés suivantes :

(T0) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $E \in \mathcal{T}$.

(T1) Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que $A_i \in \mathcal{T}$ pour tout $i \in I$, alors la réunion $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.

(T2) Si $A, B \in \mathcal{T}$, alors on a $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Une telle famille $\mathcal{T}$ est dite une *topologie* sur E et les éléments de $\mathcal{T}$ sont appelés *ouverts*. On appelle *espace topologique* la donnée d'un ensemble E muni d'une topologie $\mathcal{T}$.

Exercice 18. Soient (E, d) une espace métrique et $\mathcal{T}(d)$ la famille des sous-ensembles ouverts de E pour la distance d.

(a) Montrer que $\mathcal{T}(d)$ est une topologie, dite *topologie induite par la distance d.*

Considérons maintenant la famille $\mathcal{T}_{\mathrm{triv}} \subseteq \mathcal{P}(E)$ donnée par $\mathcal{T}_{\mathrm{triv}} = \{\emptyset, E\}$.

(b) Montrer que $\mathcal{T}_{\mathrm{triv}}$ est une topologie sur E, dite *topologie triviale.*

(c) Montrer qu'il existe une distance d sur E tel que $\mathcal{T}(d) = \mathcal{T}_{\mathrm{triv}}$ si et seulement si E a un seul élément.

Enfin considérons la famille $\mathcal{T}_{disc} = \mathcal{P}(E)$.

(d) Montrer que $\mathcal{T}_{disc}$ est une topologie sur E, dite *topologie discrète.*

(e) Montrer que la distance triviale d_{triv} sur E induit la topologie discrète.

Exercice 19. Soit (E, d) une espace métrique. Montrer que, pour tout $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$, il existe deux ouverts U_x et U_y tels que $x \in U_x$, $y \in U_y$ et $U_x \cap U_y = \emptyset$.
Un espace topologique avec cette propriété est dit *de Hausdorff*, ou *séparé*, ou encore T_2. Donc la conclusion de cet exercice est :

Tout espace métrique est de Hausdorff.