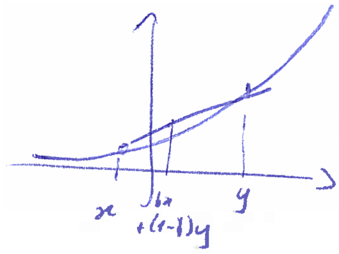
Exo 15. $p, q \in [1; +\infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ($a$ ou $b = 0$, se vaut aussi)

a) $\forall a, b \in]0, +\infty[$, montrer $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ (inégalité de Young)

· On utilisera le fait que l'exponentielle est convexe : $\forall t \in [0,1]$,

$$e^{(tx+(1-t)y)} \leq t e^x + (1-t) e^y$$



$$ab = e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\overbrace{\ln a^p}^{x} + \frac{1}{q}\overbrace{\ln b^q}^{y}} \quad (t = \tfrac{1}{p})$$

$$\leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

b) $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $\|x\|_p = \|y\|_q = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq 1$

Par l'inégalité de Young appliquée à $a = |x_i|$ et $b = |y_i|$, on a ($\forall i = 1 \to n$)

$|x_i y_i| = |x_i||y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$. On prend la somme pour $i = 1, \dots, n$:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p}\underbrace{\|x\|_p^p}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\|y\|_q^q}_{=1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

c) $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on montre $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. (Inég. de Hölder)

Soit $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|_p}$ et $\tilde{y} = \frac{y}{\|y\|_q}$, de façon que $\|\tilde{x}\|_p = \|\tilde{y}\|_q = 1$. $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$

Par le point b, on a $\left|\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \tilde{y}_i\right| \leq 1$,

Mais $\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\|x\|_p}$, $\tilde{y}_i = \frac{y_i}{\|y\|_q}$. Donc on a obtenu :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\|x\|_p} \cdot \frac{y_i}{\|y\|_q}\right| \leq 1 \iff \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

d) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire standard, défini par $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Si $x = y$, on a $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2$.

Montrer : $|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle^2 \langle y,y\rangle$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

Il suffit appliquer l'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ $(p=q=2)$.

$$|\langle x,y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$$

$$\Rightarrow |\langle x,y\rangle|^2 \leq \|x\|_2^2 \|y\|_2^2 = \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle.$$

e) Déduire de l'inégalité de Hölder que $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \max\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| : y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q = 1\right\}$$ (formule variationnelle)

(≥) Par Hölder, $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Si y est t.q. $\|y\|_q = 1$ et

$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p$. Donc l'inégalité est aussi vérifiée pour le max.

(≤) Il suffit montrer qu'il existe y t.q. $|\langle x,y\rangle| = \|x\|_p$.

D'abord on remarque que dans l'inégalité de Young il y a égalité si $a^p = b^q$. $\Leftrightarrow$ $b = a^{p/q} = a^{p-1}$.

On définit $z_i = |x_i|^{p-1}$, $z = (z_1, \dots, z_n)$. On calcule $\|z\|_q$:

$$\|z\|_q = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^q} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x\|_p^{p-1}.$$

$q(p-1) = p$

On définit donc $y_i := \frac{z_i}{\|z\|_q} = \frac{|x_i|^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} = \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right)^{p-1}$ et $\|y\|_q = 1$.

À changement de signe de y_i près, on peut assumer signe(y_i) = signe(x_i) $\forall i$.

On a donc $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i||x_i|^{p-1}}{\|x\|_p^{p-1}} = \frac{\sum |x_i|^p}{\|x\|_p^{p-1}} = \frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^{p-1}} = \|x\|_p$.

f) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ montrer : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$ (inég. de Minkowski)

- $|x_i + y_i|^p = (|x_i + y_i|)(|x_i + y_i|^{p-1}) \leq (|x_i| + |y_i|)(|x_i + y_i|^{p-1})$.

$\Rightarrow \|x+y\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^n |y_i|\,|x_i+y_i|^{p-1}$

~~Mais $|x_i| \leq \|x\|_p$, $|y_i| \leq \|y\|_p$ Donc~~

On applique maintenant l'inégalité de Hölder à

x et $(|x_i+y_i|^{p-1})$: $z_i := |x_i+y_i|^{p-1}$ $\|z\|_q = \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^{\underset{p}{\underset{\shortparallel}{q(p-1)}}}\right)^{\frac{1}{q}} = \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} = \|x+y\|_p^{p-1}$

$\sum_{i=1}^n |x_i|\,|x_i+y_i|^{p-1} \leq \|x\|_p \|z\|_q = \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1}$.

Analoguement pour y, et on obtient :

$\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p \|x+y\|_p^{p-1} + \|y\|_p \|x+y\|_p^{p-1} = (\|x\|_p + \|y\|_p)\|x+y\|_p^{p-1}$.

d'où l'inégalité.

- En utilisant la formule variationnelle :

$\|x+y\|_p = \max\{|\langle x+y, z\rangle| : \|z\|_q = 1\} \leq \max\{|\langle x, z\rangle| + |\langle y, z\rangle| : \|z\|_q = 1\}$

Mais $|\langle x, z\rangle| \leq \|x\|_p \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\|z\|_q}}$ et $|\langle y, z\rangle| \leq \|y\|_p \|z\|_q$ (Hölder)

D'où $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Exo 16.

a) Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Il faut vérifier les conditions de la définition : $p < +\infty$:

1) $\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

$$\|x\|_p = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^p = 0 \Leftrightarrow |x_i|^p = 0\ \forall i \Leftrightarrow |x_i| = 0\ \forall i$$
$$\Leftrightarrow x_i = 0.\ \forall i.$$

2) $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\, \|x\|$:

$$\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n |\lambda|^p \cdot |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda|\, \|x\|_p.$$

3) $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, c'est l'inégalité de Minkowski.

b) Si $p = +\infty$:

1) $\|x\|_\infty = 0 \Leftrightarrow x = 0$:

$$\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\} = 0 \Leftrightarrow |x_i| = 0\ \forall i \Leftrightarrow x_i = 0\ \forall i.$$

2) $\|\lambda x\|_\infty = |\lambda|\, \|x\|_\infty$:

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_i \{|\lambda x_i|\} = \max_i \{|\lambda| |x_i|\} = |\lambda| \max_i \{|x_i|\} = |\lambda|\, \|x\|_\infty$$

3) $\|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$:

$$\|x+y\|_\infty = \max_i \{|x_i + y_i|\} \leq \max_i \{|x_i| + |y_i|\}$$

Mais $\forall i$, $|x_i| \leq \|x\|_\infty$ et $|y_i| \leq \|y\|_\infty$. Donc $\leq \max_i \{\|x\|_\infty + \|y\|_\infty\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

Rmq : Exo 15, $p = +\infty$: a) $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. $p = \infty$, $q = 1 \to ab \leq$

$a \leq 1 \Rightarrow \frac{a^\infty}{\infty} = 0$, $ab \leq b$ (ok). $a > 1 \Rightarrow \frac{a^\infty}{\infty} = +\infty$ $ab \leq b + \infty$ (ok).

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Il faut montrer $\lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_i |x_i|^p} = \max_i \{|x_i|\}$

Supposons (à changement de l'ordre de coordonnées près) que $\|x\|_\infty = |x_1|$.

$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n|x_1|^p$. $\Rightarrow \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} \leq \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{n|x_1|^p} = \lim_{p \to \infty} \sqrt[p]{n} \cdot |x_1| = |x_1| = \|x\|_\infty$

D'autre part, pour tout $j = 1 \ldots n$, $\sum_i |x_i|^p \geq |x_j|^p$.

$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq |x_j| \quad \forall j$. $\Rightarrow \|x\|_p \geq \|x\|_\infty \quad \forall p$. et $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p \geq \|x\|_\infty$.

d) On vient de montrer $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \quad \forall p$

On avait aussi vu $\|x\|_p^p \leq n\|x\|_\infty^p \Rightarrow \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \cdot \|x\|_\infty$.

Donc $\|x\|_\infty$ est équivalent à $\|\cdot\|_p$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

On en déduit que les normes $\|\cdot\|_p$ sont toutes équivalentes (sur $\mathbb{R}^n$) pour tout $p \in [1; +\infty]$.