TD 2 - Continuité et normes subordonnées

Questions de cours.

(a) Donner la définition de fonction continue en un point.

(b) Donner la définition de fonction continue.

(c) Soit $f : E \to F$ une application. Rappeler la définition de image directe d'une partie $A \subseteq E$ et d'image réciproque de $B \subseteq F$. Utiliser ces notions pour décrire la continuité de f si E et F sont munis de distances d_E et d_F respectivement.

(d) Donner le critère séquentiel de continuité en un point.

(e) Donner la définition de fonction uniformément continue.

(f) Donner le critère séquentiel d'uniforme continuité.

(g) Donner la définition de fonction lipschitzienne.

(h) Donner la définition de la constante de Lipschitz d'une fonction (lipschitzienne).

(i) Quelle est la relation entre fonctions continues, uniformément continues, et lipschitziennes ?

(j) Donner la définition de norme subordonnée.

(k) Est-ce que toute application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue ? Et si la dimension de V est finie ?

(l) Sous quelle condition une application linéaire $L : V \to W$ entre espaces vectoriels normés est continue / uniformément continue / lipschitzienne ?

Continuité

Exercice 1. Utiliser la définition de la continuité afin de prouver les assertions suivantes.

(a) L'application $x \mapsto x^2$ de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans lui-même est continue.

(b) L'application s de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ dans lui-même n'est pas continue en 0, où $s(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

(c) L'application $x \mapsto \frac{1}{x}$, définie de $]0, +\infty[$ dans lui-même (où $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ est consideré avec sa valeur absolue standard) est continue.

(d) L'application $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$ n'est pas continue en 0, où $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(e) L'application de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ donnée par $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ est continue.

(f) L'application de $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ donnée par $(x, y, z) \mapsto xyz$ est continue.

(g) L'application de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ donnée par $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k$ est continue.

(h) L'application de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ vers $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ donnée par $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y^2)$ est continue.

Exercice 2. Soient $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et A une partie non vide de V. Pour tout $p \in V$, on pose $d_A(p) = d(p, A) = \inf_{q \in A} d(p, q)$. Montrer que d_A est une application bien définie de V à $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et montrer qu'elle est continue par rapport aux normes $\|\cdot\|$ sur V et $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Considérons $\mathbb{R}$ avec sa valeur absolue standard. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Considérons $\mathbb{R}$ avec sa valeur absolue standard. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, q \in \mathbb{N}^*, p \in \mathbb{Z}, \text{pgcd}(p, q) = 1, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$, mais continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Considerons $\mathbb{R}^n$ avec sa norme euclidienne standard $\|\cdot\|_2$. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? Fermées ?

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < x^3 + y^3\}$, (b) $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 1, \ln z \leq y^2 + x^2\}$,

(c) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq y, z^2 < x + y\}$, (d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y^2 - x < 0\}$.

Exercice 6. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de dimension n à valeurs réelles. Soit $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vu en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Les parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles ouvertes ? Fermées ?

(a) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$,
(b) $B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det M = 0\}$,
(c) $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tM = -M\}$,
(d) $D = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid 0 < \det M < 2, \operatorname{tr} M < -1\}$,
(e) $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \|Mv\|_2 < 1\}$, avec v n'importe quel vecteur fixé de $\mathbb{R}^2$.

Fonctions uniformément continues et fonctions lipschitziennes

Exercice 7. Dans les cas suivants, déterminer si les applications données sont continues, lipschitziennes, uniformément continues. Sur $\mathbb{R}^n$, sauf si différemment spécifié, on considère la norme euclidienne standard $\|\cdot\|_2$.

(a) $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^3$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = x^3$,
(c) $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \tan x$,
(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \arctan x$,
(e) $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \sqrt{x}$,
(f) $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = \sqrt{x}$,
(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = 2x - 3y$,
(h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = 2x - 3y$, où on considère $\mathbb{R}^2$ avec la norme $\|\cdot\|_1$,
(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, donnée par $f(x,y) = 2x - 3y$, où on considère $\mathbb{R}^2$ avec la norme $\|\cdot\|_\infty$,
(j) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donnée par $f(x,y) = \big(x - y, x + y, \sin(xy)\big)$.

Exercice 8. Soient V_1, V_2, V_3 trois espaces vectoriels normés, et soient $f : V_1 \to V_2$ et $g : V_2 \to V_3$ deux fonctions.

(a) Montrer que si f est L_f-lipschitzienne et g est L_g-lipchitzienne, alors $g \circ f$ est une fonction L-lipschitzienne, avec $L = L_f \cdot L_g$.
(b) Montrer que si f et g sont uniformément continues, alors $g \circ f$ l'est aussi.
(c) Montrer que f lipschitzienne implique f uniformément continue, et f uniformément continue implique f continue.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que f est lipshitzienne si et seulement si f' est bornée. Montrer que dans ce cas on a que la constante de Lipschitz de f est donnée par

$$L(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|.$$

Normes subordonnées

Exercice 10. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $\operatorname{End}(V)$ l'espace des applications linéaires $L : V \to V$. Désignons par $[\![\cdot]\!]$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|$ sur $\operatorname{End}(V)$.

(a) Montrer que $[\![\operatorname{Id}]\!] = 1$.
(b) Montrer que $[\![L_2 \circ L_1]\!] \leq [\![L_1]\!] \cdot [\![L_2]\!]$. Montrer à l'aide d'un exemple que l'inégalité peut être stricte.
(c) En déduire que si L est inversible, alors $[\![L^{-1}]\!] \geq [\![L]\!]^{-1}$.

Exercice 11. Soit $V \cong \mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|_1$ la norme un sur $\mathbb{R}^n$. Soit $[\![\cdot]\!]_1$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|_1$ sur $\operatorname{End}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$[\![A]\!]_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Exercice 12. Soit $V \cong \mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini sur $\mathbb{R}^n$. Soit $[\![\cdot]\!]_\infty$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathrm{End}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$[\![A]\!]_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

En utilisant l'Exercice 11, en déduire que $[\![A]\!]_\infty = [\![{}^tA]\!]_1$.

Exercice 13. Soit $V \cong \mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|_2$ la norme deux sur $\mathbb{R}^n$. Soit $[\![\cdot]\!]_2$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|_2$ sur $\mathrm{End}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dénote par $\rho(B)$ le *rayon spectral* de B, c'est-à-dire, la plus grande valeur absolue des valeurs propres de B :

$$\rho(B) := \max\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ est une valeur propre de } B\}.$$

Montrer que

$$[\![A]\!]_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}.$$

En déduire que si A est symétrique, alors $[\![A]\!]_2 = \rho(A)$.

Exercice 14. Soient $[\![\cdot]\!]_1, [\![\cdot]\!]_2, [\![\cdot]\!]_\infty$ les normes subordonnées définies dans les Exercices 11, 13, 12. Calculer la valeur prise par ces normes, et le rayon spectral, pour les matrices suivantes.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 15. Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients réels. Désignons par $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ les normes un, deux et infini sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vu comme espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^{n\times n}$. Montrer que ces normes ne sont pas des normes subordonnées.

Exercice 16. Soit $V \cong \mathbb{C}^n$ un espace vectoriel complexe de dimension finie, et $\|\cdot\|$ une norme sur V. Soit $[\![\cdot]\!]$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|$ sur $\mathrm{End}(V) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $\rho(A) \leq [\![A^k]\!]^{\frac{1}{k}}$, où ρ désigne le rayon spectral de A (voir Exercice 13).

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice, et supposons que $\rho(A) < 1$. Montrer que dans ce cas $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0$ (par rapport à n'importe quelle norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
Indication : il suffit de montrer que tout coefficient de A^k tend vers 0 (par rapport à la valeur absolue sur $\mathbb{C}$). Utiliser le résultat d'algèbre linéaire qui dit qu'une matrice peut être mise en forme normale de Jordan. Dans le cas où on ne connaîtrait pas ce résultat, se restreindre au cas où A est diagonalisable.

(c) Déduire des points précédents, que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\rho(A) = \lim\limits_{k\to+\infty} [\![A^k]\!]^{\frac{1}{k}}$.
Indication : appliquer le point précédent à $A/(\rho(A)+\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ petit.

Exercice 17. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Calculer $[\![\varphi]\!]$ où $[\![\cdot]\!]$ est la norme d'application linéaire subordonnée aux normes de E et F, dans les cas suivants :

(a) $E = F = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi(x,y) = (5x, -2y)$;
(b) $E = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$, $F = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$;
(c) $E = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $\varphi(x,y,z) = (2x+y, 3z-y)$;
(d) $E = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\varphi(x,y,z) = x - y + z$;
(e) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $F = (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$;
(f) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $F = (M_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$;
(g) $E = (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $\varphi(A) = \mathrm{tr}\, A$.

Espaces de suites

Exercice 18. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère les sous-espaces suivants :

$$\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_n |u_n| < +\infty\},$$
$$\ell^2 = \ell^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty\},$$
$$\ell^1 = \ell^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty\}.$$

Pour tout $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on désigne

$$\|u\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|, \qquad \|u\|_2 := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}, \qquad \|u\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

(a) Rappeler pourquoi $\ell^\infty, \ell^2, \ell^1$ sont des espaces vectoriels, et montrer que $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donner des exemples pour montrer que les inclusions sont strictes.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\ell^1(\mathbb{R})$, $\ell^2(\mathbb{R})$ et $\ell^\infty(\mathbb{R})$ respectivement. Sont-elles aussi des normes sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$?

Exercice 19. Dans le cadre de l'Exercice 18, soit $S : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'application de *décalage* définie comme suit. Si $u = (u_n)_n$ est une suite avec $u_n \in \mathbb{K}$, alors $S(u) = (S(u)_n)_n$ est la suite donnée par $S(u)_n = u_{n+1}$.

(c) Montrer que S définit un endomorphisme linéaire de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Est-ce qu'il est inversible ? Calculer son noyau.

(d) Montrer que $S(\ell^p) \subseteq \ell^p$ pour $p = 1, 2, \infty$.

(e) Montrer que S est continu sur ℓ^p par rapport à la norme $\|\cdot\|_p$, pour $p = 1, 2, \infty$.

(f) Calculer la norme $[\![S]\!]_p$ de l'application linéaire S induite par $\|\cdot\|_p$ sur ℓ^p pour $p = 1, 2, \infty$.

Espaces de fonctions

Exercice 20. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $p \in [1, +\infty[$. On considère les sous-espaces suivants :

$$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty\},$$
$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx < +\infty\}.$$

Pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, on désigne

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \qquad \|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(a) Rappeler pourquoi $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}), \mathcal{L}^2(\mathbb{R}), \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels, et montrer que $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R})$. À l'aide d'exemples, montrer que les inclusions sont strictes.

(b) Montrer que $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R})$ respectivement. Sont-elles aussi des normes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$?

Exercice 21. On considère $E = \mathcal{C}([-1, 1])$ l'espace des fonctions continues $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. On désigne par $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ les normes un et infini sur E.
Soit $L : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $L(f) = f(1) - f(-1)$.
Soit $A = \{f \in E \mid f(1) = f(-1)\} = L^{-1}(0)$.

(a) Montrer que L est une application linéaire.

(b) Montrer que L est continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E.

(c) En déduire que $A = \{f \in E \mid f(1) = f(-1)\}$ est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

(d) Calculer $[\![L]\!]_\infty$, où $[\![\cdot]\!]_\infty$ est la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|_\infty$ sur E et $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}$.

(e) Montrer que L n'est pas continue par rapport à la norme $\|\cdot\|_1$ sur E.

(f) Pour tout $f \in E$, trouver une suite $(f_n)_n$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n \in A$ et telle que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. En déduire que A est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$, et n'est donc pas fermé.