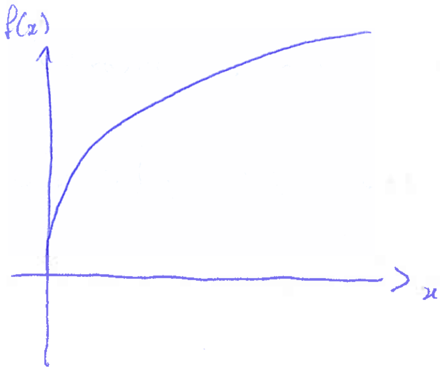
TD 02



Exo 7, e) $f : [0; +\infty[\to \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$.

- On veut montrer que f est continue.

Montrons d'abord que f est continue en 0.

Soit $\varepsilon > 0$. supposons $x < \delta_0$ alors

$|f(x) - f(0)| = |\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta_0}$

Il suffit prendre $\delta_0 = \varepsilon^2$.

Montrons maintenant que f est continue en x_0, $\forall x_0 \in]0; +\infty[$.

Fixons un tel $x_0 \in]0; +\infty[$. Soit $x \in [0; +\infty[$ avec $|x - x_0| < \delta$.

Alors $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \dfrac{|x - x_0|}{\underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}_{\geq 0}} \leq \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \dfrac{\delta}{\sqrt{x_0}}$.

Il suffit prendre $\delta \leq \sqrt{x_0} \cdot \varepsilon$.

Donc f est continue sur $[0; +\infty[$

- On veut montrer que f est uniformement continue (sur $[0; +\infty[$).

Fixons $\varepsilon > 0$. On a vu que $\exists\, \delta_0 = \varepsilon^2$ tel que $|x - 0| < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$.

Supposons que $x_0 \leq \dfrac{\delta_0}{2}$. Alors $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| \leq \max\{\sqrt{x}, \sqrt{x_0}\} < \sqrt{\delta_0} = \varepsilon$.

Soit $x \in [0; +\infty[$ tel que $|x - x_0| < \underbrace{\dfrac{\delta_0}{2}}_{=: \delta_1} \Rightarrow x < \delta_0$

Soit maintenant $x_0 \geq \dfrac{\delta_0}{2}$. Supposons $|x - x_0| < \delta_2$ on a alors.

$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \dfrac{|x - x_0|}{\underbrace{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}_{\geq 0}} \leq \dfrac{|x - x_0|}{\underbrace{\sqrt{x_0}}_{\geq \sqrt{\delta_1}}} < \dfrac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1}}$ $\qquad \dfrac{\delta_2}{\sqrt{\delta_1}} \leq \varepsilon$ si $\delta_2 = \sqrt{\delta_1} \cdot \varepsilon = \dfrac{\varepsilon^2}{\sqrt{2}}$.

Donc on a montré que $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} = \frac{\varepsilon^2}{2}$

tel que $\forall x, x_0 \in [0; +\infty[$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

c'est à dire, f est uniformément continue.

- Montrons que f n'est pas Lipschitzienne.

Si f est lipschitzienne, alors $f|_{]0;+\infty[}$ l'est.

Il suffit donc montrer que $f|_{]0;+\infty[}$ n'est pas lipschitzienne.

Mais ~~f~~ $g := f|_{]0;+\infty[} :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est dérivable, de dérivée :

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Grâce à l'exercice 9, g est lipschitzienne

$\Leftrightarrow \sup_{x \in]0;+\infty[} |g'(x)| < +\infty$. mais $\lim_{x \to 0} |g'(x)| = +\infty$.

Donc g (et f) n'est pas lipschitzienne.

f) $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ est lipschitzienne.

On pourrait utiliser encore une fois l'exercice 9. Pour une preuve direct:

Par le théorème des accroissements finis, $\forall x_0 < x \in [1; +\infty[$, on a

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{x - x_0} = f'(\xi), \text{ avec } \xi \in]x_0, x[.$$

Mais $f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \leqslant \frac{1}{2}$ (car $\xi > 1$ et $\xi \mapsto \sqrt{\xi}$ est croissante)

Il s'en suit que $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2} |x - x_0|$.

Donc f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, et donc uniformement continue et continue.

Rmq: Pour montrer que $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est uniformement continue,
$x \mapsto \sqrt{x}$
on pourra utiliser des arguments de compacité, comme suit.

Soit $K = [0;1]$ et $A = [1;+\infty[$. de façon que $[0;+\infty[= K \cup A$.
et $K \cap A = \{1\}$.

. K est compacte, car fermé et borné. f est continue.

Par un théorème vu en cours, toute fonction continue ~~f~~ à valeurs ~~compacte~~ dans un compacte est uniformément continue.

Donc $f|_K$ est uniformément continue.

On a vu que $f|_A$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, donc uniformément cont.

$f|_K$ u.c. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_K = \delta_K(\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall x, y \in K$, $|x-y| < \delta_K \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

$f|_A$ u.c. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_A = \delta_A(\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall x, y \in A$, $|x-y| < \delta_A \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Soit maintenant $x, y \in [0;+\infty[$.

- Si $x < y \leq 1$. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_K$ t.q. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
- Si $1 \leq x < y \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_A$ t.q. $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.
- Si $x \leq 1 \leq y$: Soit $\delta = \min\{\delta_K, \delta_A\} > 0$. $|x-y| < \delta \Rightarrow |x-1| < \delta \leq \delta_K$
  $|y-1| < \delta \leq \delta_A$.

$$\Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f(x)-f(1)+f(1)-f(y)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x)-f(1)|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|f(1)-f(y)|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon.$$

Il suffit donc considerer $\delta(\varepsilon) := \min\left\{ \delta_K\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) ; \delta_A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \right\} > 0$

et $|x-y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, et f est unif. continue