TD 3 - Suites de fonctions et espaces compacts

Questions de cours.

(a) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : (E, d_E) \to (F, d_F)$ entre espaces métriques. Que veut dire : la suite (f_n) converge ponctuellement vers $f_\infty : E \to F$?

(b) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $f_n : (E, d_E) \to (F, d_F)$ entre espaces métriques. Que veut dire : la suite (f_n) converge uniformément vers $f_\infty : E \to F$?

(c) Est-ce que la convergence simple (ou ponctuelle) implique la convergence uniforme ? Est-ce que la convergence uniforme entraine la convergence simple ?

(d) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues. Supposons que f_n converge ponctuellement vers une fonction f. Est-ce que f est forcément continue ? Et si la convergence était uniforme ?

(e) Soit E un espace métrique et A une partie de E. Donner la définition de recouvrement ouvert de A.

(f) Soit E un espace métrique et A une partie de E. Donner la définition de sous-recouvrement d'un recouvrement de A.

(g) Soit E un espace métrique. Énoncer la propriété de Borel-Lebesgue, satisfaite par un compact K de E.

(h) Soit E un espace métrique. Quelle propriété a toute suite à valeurs dans un compact de E ?

(i) Soit E un espace métrique. Qu'est-ce qu'une suite décroissante de parties de E ? Quelle propriété vaut pour ces objets si E est compact ?

(j) Soit $V = \mathbb{R}^n$. Donner une caractérisation des compacts de V.

(k) Quelle est la relation entre les fonctions continues et les fonctions uniformément continues ? Et si f est définie à valeurs dans un ensemble compact ?

(l) Énoncer le théorème de Heine.

Suites de fonctions

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue standard. Soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \max\{1 - nx, 0\}.$$

(a) Montrer que la suite (f_n) converge ponctuellement vers une fonction $f_\infty : [0,1] \to \mathbb{R}$, qu'on explicitera.

(b) Est-ce que f_∞ est continue ? En déduire que la suite (f_n) ne converge pas uniformément.

Soit maintenant $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Notons par $\|\cdot\|_\infty$ la norme infini sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

(c) Calculer $\|f_n\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Calculer $\|f_n - f_m\|_\infty$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}$.

(e) En déduire que $(f_n)_n$ n'est pas une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

(f) Montrer que la suite $(f_n)_n$ n'est pas convergente dans $(\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue standard. Dénotons par

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$$

la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}.$$

(a) Dessiner le graphe de f_n pour $n = 1, 2, 3$.

(b) Montrer que f_n converge ponctuellement vers une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera.

(c) Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 3. Soit $V = \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel, muni d'une norme $\|\cdot\|$ quelconque. Soit d la distance induite par la norme $\|\cdot\|$. Soit $(A_n)_n$ une suite croissante de sous-ensembles de V, c'est-à-dire $A_n \subseteq A_m$ pour tout $n < m$. Soit $f_n : V \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f_n(x) = d(x, A_n).$$

(a) Montrer que les fonctions f_n sont 1-lipschitziennes.

(b) Montrer que $f_n(x)$ est une suite décroissante pour tout $x \in V$.

(c) En déduire que la suite (f_n) converge ponctuellement vers $f : V \to \mathbb{R}$.

(d) Montrer que $f(x) = d(x, A)$, où $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(e) Montrer à l'aide d'un exemple que la convergence n'est pas uniforme en général.

(f) Pour tout $K \subset V$ compact, montrer que la suite $(f_n|_K)_n$ converge uniformément vers $f|_K$.

Exercice 4. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ la famille d'applications donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } n \leq x \leq n + \frac{1}{2}, \\ n + 1 - x & \text{si } n + \frac{1}{2} \leq x \leq n + 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Dessiner le graphe de f_n.

(b) Montrer que la suite f_n converge ponctuellement vers l'application nulle quand $n \to \pm\infty$.

(c) Montrer que f_n ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que f_n converge uniformément sur tout compact K dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ la suite d'applications donnée par

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

(a) Montrer que $(f_n)_n$ converge ponctuellement, et calculer sa limite.

(b) Étudier l'allure du graphe de la fonction f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que pour tout $a > 0$, la suite f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$, mais elle ne converge pas uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 6. Considerons la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, donnée par

$$f_n(x) = x^n \ln x \text{ si } x \neq 0, \quad f_n(0) = 0.$$

(a) Montrer que f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) Étudier l'allure du graphe de la fonction f_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Montrer que $(f_n)_n$ converge ponctuellement, et calculer cette limite.

(d) Est-ce que la convergence est uniforme ? Justifier la réponse.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R}$, et considerons la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ donnée par

$$f^n(x) = n^a x(1 - x^2)^n.$$

(a) Montrer que f_n converge ponctuellement vers la fonction nulle.

(b) Pour quelles valeurs de a la suite $(f_n)_n$ converge uniformément dans $[0,1]$?

(c) Pour quelles valeurs de a la suite $(f_n)_n$ converge uniformément dans les compacts de $]0,1]$?

Exercice 8. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}}.$$

(a) Montrer que la suite f_n converge ponctuellement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que l'on déterminera.

(b) Montrer que f_n converge uniformément vers f.

(c) Exprimer f_n et f par rapport à des normes de points (dans $\mathbb{R}^2$).

(d) Remarquer que la limite uniforme de fonctions dérivables n'est pas forcément dérivable.

Espaces compacts

Exercice 9. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa topologie usuelle (induite par n'importe quelle norme). Déterminer si les parties suivantes sont compactes.

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 \leq 3\}$,

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^3 \leq 5\}$,

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x^2 + 2y^2 + z^2 < 6\}$,

(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = P(x),\ P \in \mathbb{R}[x]\}$,

(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{x, y\} = 1\}$,

(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} = 2\}$,

(g) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2, z \leq x\}$,

(h) $H = \{\arctan(t)e^{\mathrm{i}t} \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, +\infty[\}$.

Exercice 10. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa topologie usuelle induite par sa structure d'espace vectoriel normé. Déterminer si les parties suivantes sont compactes.

(a) $A = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I\}$,

(b) $B = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det M \in \mathbb{Z}\}$,

(c) $C = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det M \leq 1\}$,

(d) $D = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \|Mv\|_\infty \leq 1\}$, où $v \in \mathbb{R}^2$.

(e) $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|Me_k\|_2 \leq 1, k = 1, \ldots, n\}$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 11. Soit $f : E \to F$ une fonction entre deux espaces métriques. Supposons que $E = A \cup B$ avec $A \cap B \neq \emptyset$.
Montrer que si $f|_A$ et $f|_B$ sont uniformément continues, alors f est uniformément continue.

Exercice 12. Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie d'espace vectoriel normé. Montrer que les fonctions suivantes sont uniformément continues.

(a) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (\cos x, \sin x)$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = e^{\mathrm{i}x}$.

(c) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

(f) $f : [0, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x^2, xy, y^2)$.

(g) $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y$.

Exercice 13. Dans les cas suivants, montrer que l'application $f : E \to F$ entre espaces métriques est uniformément continue sur K.

(a) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^4 \leq 4\}$ et $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(b) $E = F = (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$, $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $f(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$.

(c) $E = (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \|M\|_\infty \leq 2\}$ et $f(M) = \det M$.

(d) $E = F = (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $K = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I\}$ et $f(M) = M + {}^tM$.

Est-ce que ces fonctions sont uniformément continues sur E tout entier ?

Exercice 14. Soit V un espace vectoriel.

(a) Soient $K_1, K_2 \subset V$ deux sous-ensembles compacts de V. Montrer que $K_1 \cup K_2$ est compact.

(b) Soit $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de sous-ensembles compacts de V. Montrer que $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha$ est un compact de V.

Exercice 15. Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, et K_V, K_W deux compacts dans V et W respectivement.

(a) Montrer que $K = K_V \times K_W$ est un sous-ensemble compact de $V \times W$ quand V et W sont de dimension finie.

(b) Montrer que la même propriété est valable même sans l'hypothèse sur la dimension.

Exercice 16. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \qquad K_n \text{ est compact}, \qquad K_n \subset \operatorname{Int}(K_{n+1}).$$

Indication : Considérer l'application $f(x) = d(x, \Omega^c)$.

Exercice 17. Soient V, W deux espaces vectoriels normés, et $f : V \to W$ une fonction continue.

(a) Montrer que pour tout compact $K \subset V$, son image directe $f(K)$ est compacte dans W.

(b) Montrer à l'aide d'un exemple qu'en général $f^{-1}(K)$ n'est pas compact dans V, même si K est un compact dans W.

Exercice 18. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa topologie usuelle (induite par n'importe quelle norme). Déterminer si les parties suivantes sont compactes.

(a) $A = \{(2s - \sqrt{t}, \log t, s^2 + t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq s \leq 1, 1 \leq t \leq 4\}$,

(b) $B = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| < \pi/2\}$,

(c) $C = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| < 5\}$,

(d) $D = \{(\cos(2t), \sin(3t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}$, soient A une partie de $\mathbb{R}$, et $s, t \in \mathbb{R}$. On définit

$$sA + t := \{sx + t \in \mathbb{R} \mid x \in A\}.$$

Soit $C_0 = [0,1]$, et définissons par récurrence $C_n = \frac{C_{n-1}}{3} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{C_{n-1}}{3}\right)$.

(a) Montrer que $C_n \supset C_{n+1}$.

(b) Montrer que $\lim_n C_n = \bigcap_n C_n$ est non-vide et est un compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soit E un espace métrique, et $(K_n)_n$ une suite de compacts non vides dans E telle que $K_n \supset K_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Étant donnée une suite (x_n) telle que $x_n \in K_n$, montrer que (x_n) admet une valeur d'adhérence $x \in K = \bigcap_n K_n$.

(b) Montrer à l'aide d'un exemple que si les K_n ne sont pas compacts, le point précédent n'est plus vérifié.