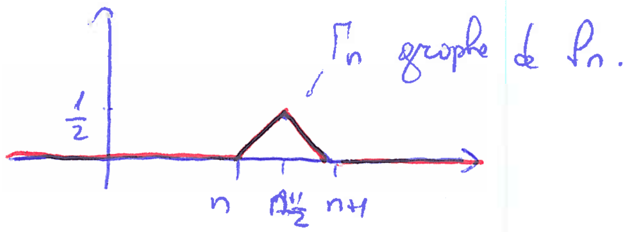
TD 03

(1)

Exo 4

$$f_n(x) = \begin{cases} x-n & \text{si } n \leq x \leq n+\frac{1}{2} \\ n+1-x & \text{si } n+\frac{1}{2} \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{autrement } (x \leq n \text{ ou } x \geq n+1). \end{cases}$$

a)



b) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Soit $N_+ \in \mathbb{Z}$ t.q. $x \leq N_+$.

Mais alors $\forall n \geq N_+$, on a $n \geq N_+ \geq x$, et $f_n(x) = 0$. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Soit $N_- \in \mathbb{Z}$ t.q. $x \geq N_- + 1$. Alors $\forall n \leq N_-$, $x \geq n+1 \geq N_- + 1$, et $f_n(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to-\infty} f_n(x) = 0$.

Donc $f_n \to 0$ pour $n \to +\infty$, et pour $n \to -\infty$.

c) $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$ $\forall n$, donc $\|f_n - 0\|_\infty \not\to 0$ et (f_n) ne converge pas uniformément vers 0.

(On a utilisé le fait que si f_n converge uniformément vers une fonction f, alors f est la limite ponctuelle des (f_n)).

d) Soit K un compact. Dans $\mathbb{R}$, un compact est un fermé borné. Donc $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $[-N, N] \supseteq K$.

Mais alors si $n \geq N$ ou $n \leq -N-1$, $f_n|_{[-N,N]} \equiv 0$.

Pour ces n ; $\|f_n|_K\|_\infty = \sup\limits_{x\in K} |f_n(x)| \leq \sup\limits_{x\in[-N,N]} |f_n(x)| = 0$.

Donc $\|f_n|_K\|_\infty \to 0$ et f converge uniformément sur K.

Exo 6. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \begin{cases} x^n \ln x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

a) ~~Pour montrer que~~ f_n est continue :

$\forall x_0 \in]0;1]$, f_n est continue car produit de fonctions continues

Pour la continuité en 0, il faut montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{x^n \ln x}_{f_n(x)} = \underbrace{0}_{f_n(0)}.$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underset{\downarrow \atop 0}{x^n} \cdot \underset{\downarrow \atop -\infty}{\ln x}$ est une forme indéterminée. On utilise l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-n}} \underset{\uparrow \atop \text{si existe}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-n x^{-n-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{-n x^{-n}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^n}{n}\right) = 0.$$

b) On étudie la dérivée de f_n sur $]0,1]$.

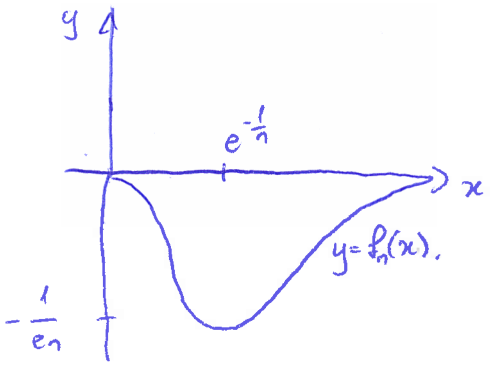
$$f_n'(x) = n x^{n-1} \ln x + \frac{x^n}{x} = \underset{\vee \atop 0}{x^{n-1}} (n \ln x + 1)$$

$n \ln x + 1 \geq 0 \iff \ln x \geq -\frac{1}{n} \iff x \geq \underset{\in]0,1[}{e^{-\frac{1}{n}}}$

Donc f admet minimum au point $e^{-\frac{1}{n}}$. $f(e^{-\frac{1}{n}}) = (e^{-\frac{1}{n}})^n \cdot \ln e^{-\frac{1}{n}} = -\frac{1}{en}$

Remarquons que $f_n(x) \leq 0$ $\forall x \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, et $f_n(1) = 1^n \cdot \ln 1 = 0$.

On a donc :



c) Soit $x \in [0,1]$. On veut calculer $f_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Si $x=0$, $f_n(0)=0$ $\forall n$, et $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$.

Si $x>0$ et $x<1$; $\lim_{n\to\infty} \underset{\underset{0}{\downarrow}}{x^n} \ln x = 0 \cdot \ln x = 0$.

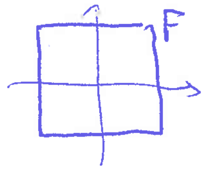
Si $x=1$, $f_n(0)=1$ $\forall n$, et $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 0$.

Donc f_n converge ponctuellement à la fonction nulle.

d) Grâce au point (b), on sait que $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = \frac{1}{en} \to 0$.

Donc f_n converge uniformément vers la fonction nulle.

Exo 9. f) $F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} = 2\}$.

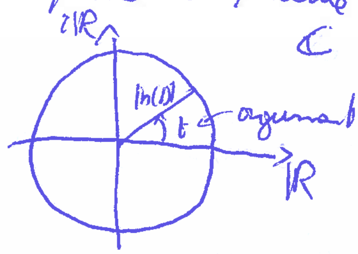


Dans $\mathbb{R}^2$, F est compact si et seulement si F est fermé et borné. Sur $\mathbb{R}^2$ on considère la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Alors $F = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\|_\infty = 2\}$ est fermé (car frontière de la boule de centre 0 et rayon 2) et borné (car contenu dans la boule fermée de centre 0 et rayon 2), donc compacte.

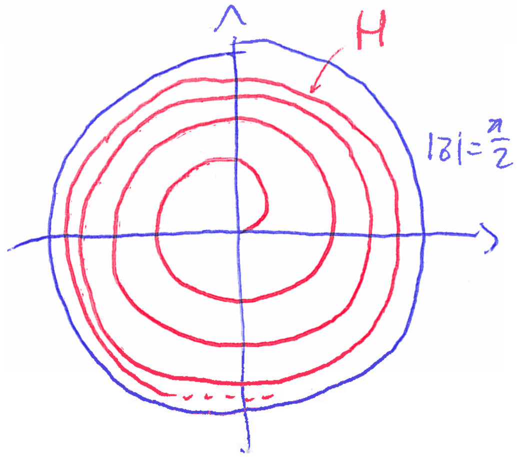
h) $H = \{\arctan t \cdot e^{it} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \mid t\in[0;+\infty[\}$

$h(t) := \arctan(t)\cdot e^{it}$ est un nombre complexe de module $\arctan t$ et argument t.



L'arctan est une fonction bornée ($\arctan([0;+\infty[) = [0;\frac{\pi}{2}[$).

Donc H est contenu dans la boule de rayon $\frac{\pi}{2}$ et centre 0, donc borné.



On veut montrer que H n'est pas fermé (et donc pas compact).

Pour cela, il suffit trouver une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in H$ $\forall n\in\mathbb{N}$, mais $z_n \to z_\infty \notin H$.

Soit $z_n = h(2n\pi) = \arctan(2n\pi)\cdot e^{i2n\pi} = \arctan(2n\pi)$

$z_n \in H$ $\forall n$ par construction. De plus, $2n\pi \to \infty$ et $\arctan(2n\pi) \to \frac{\pi}{2}$.

Donc $z_n \to \frac{\pi}{2} \notin H$, car $H \subseteq \{z \mid |z| < \frac{\pi}{2}\}$.

Exo 10. c) $C = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det M \leq 1\}$.

C est compact $\Leftrightarrow$ C est fermé et borné (si on considère la $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ça veut dire que $\exists N >> 0$ tq. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in C \Rightarrow$ $|a| \leq N$, $|b| \leq N$, $|c| \leq N$, $|d| \leq N$.

Or. C est fermé (car image réciproque de $]-\infty, 1]$ fermé par la fonction $\det : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, qui est continue)
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad-bc$ ← polynomiale)

Mais C n'est pas borné.

Par exemple si $M_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}_{n\in\mathbb{N}}$ $\det M_n = -n \leq 1$. $\Rightarrow M_n \in C$.

(Autre choix possible $M'_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M'_n = 1$, $\|M_n\|_\infty = n$) mais $\|M_n\|_\infty = n \to \infty$.

Exo 12. c) $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ est uniformément continue.
$x \mapsto \sqrt{x}$

Soit $K = [0,1]$ et $A = [1;+\infty[$. $K \cup A = [0,+\infty[$ et $K \cap A = \{1\}$.

- $f|_K$ est uniformément continue, car $f|_K$ est continue et définie sur K compact.
- $f|_A$ est lipschitzienne. Comme f est dérivable, il suffit vérifier que f' est borné sur A, c'est à dire, $\sup_{x\in A} |f'(x)| < +\infty$.

$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. si $x \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$. (avec égalité pour $x=1$)

Donc $\sup_{x\in A} |f'(x)| = \frac{1}{2} < +\infty$, et $f|_A$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne, ~~[illegible]~~.

et donc uniformément continue.

Grâce à l'exercice 11 (TD3) on en déduit que f est uniformément continue, car $f|_K$, $f|_A$ le sont, et $A \cap K \neq \emptyset$.

Exo 13 a) $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$, $F = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + 4y^4 \leq 4\}$,
$f(x,y) = x^2 - y^2$.

On veut montrer que f est uniformément continue sur K.

D'abord on montre que K est compact.

$K = g^{-1}([1,4])$, ou $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 + 4y^4$ est continue, $[1,4]$ est fermé,

et donc K est fermé.

Montrons que K est borné.

$$x^2 + 4y^4 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq 4 \underbrace{-4y^4}_{\leq 0} \leq 4 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2.$$

$$\Rightarrow 4y^4 \leq 4 - x^2 \leq 4 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

Donc K est borné (car $|x|$ et $|y|$ le sont).

$f : E \to F$ est continue, car polynomiale.

Par le théorème de Heine, f continue sur K compact est uniformément continue.